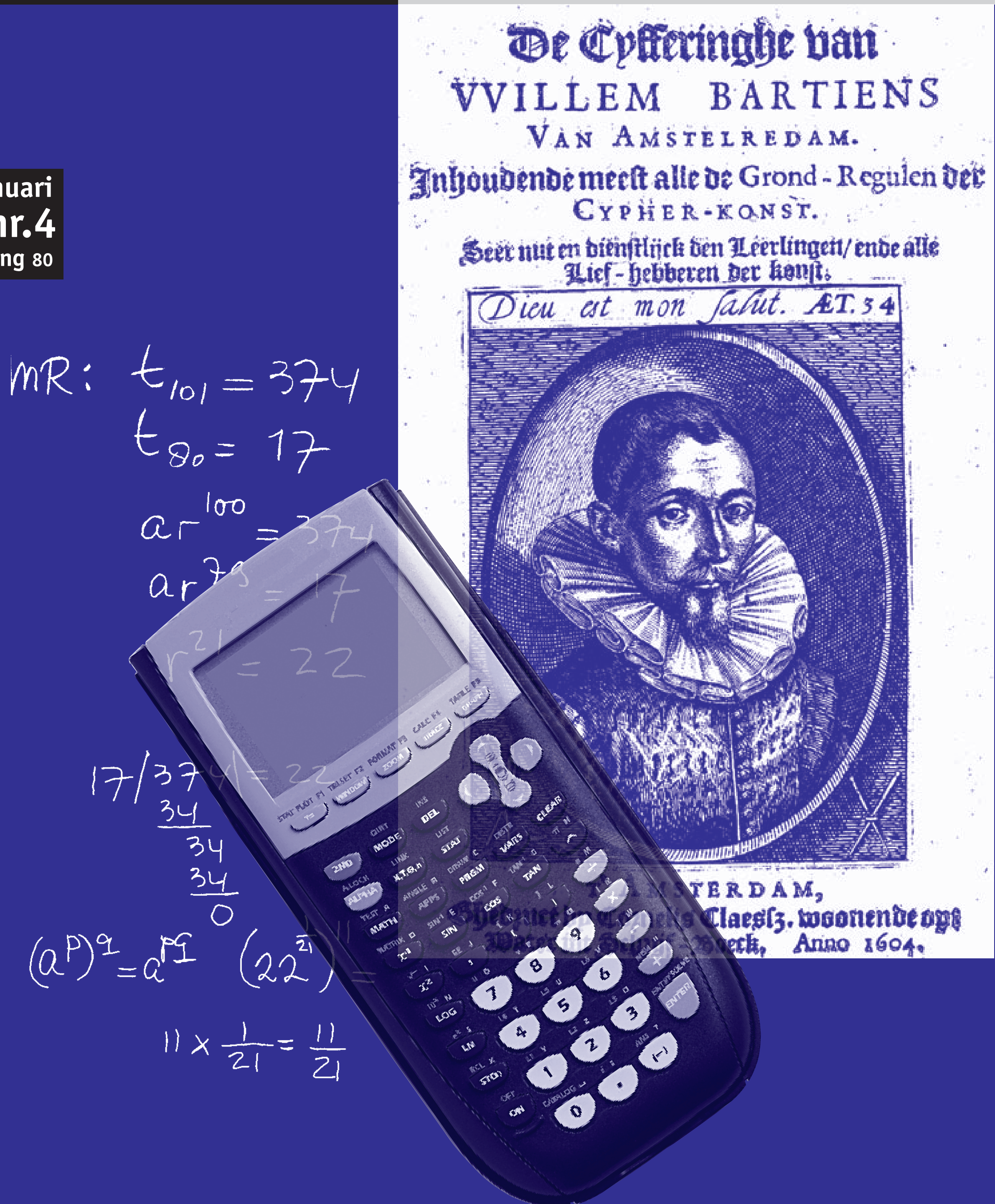
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

Rekenen
Rekenonderwijs

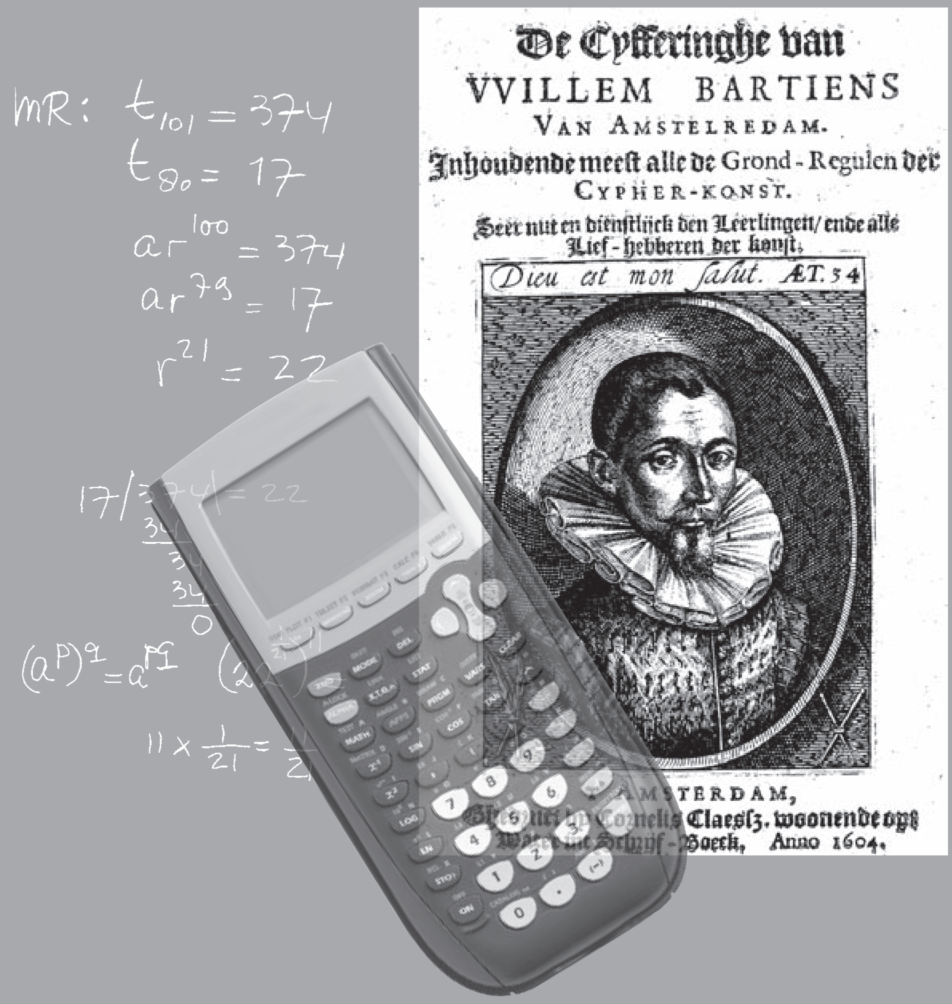
januari
2005/nr.4
jaargang 80



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

4

januari 2005 JAARGANG 80

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Rekenspecial

Problemen binnen de volksgezondheid vinden meteen hun weerslag in de pers. Voor u ligt – ter illustratie van deze bewering – een omvangrijk nummer, een special met 'overgewicht' (140 pagina's), over een gewichtig thema: Rekenen! Zie de 'Leeswijzer' op de volgende pagina, voor een inleiding en een overzicht.
De redactie streeft ernaar jaarlijks een themanummer uit te brengen. Zo verschenen er specials over uiteenlopende onderwerpen als Bottema & meetkunde (januari 2002), onderzoeksvaardigheden & geïntegreerd wiskundeonderwijs (2003) en kunst & wiskunde (2004). Tegen de tijd dat u dit leest, heeft de redactie zich inmiddels gebogen over de keuze van een thema voor het januarinummer van 2006. Suggesties van uw kant voor onderwerpen van volgende specials zijn natuurlijk welkom.

Ook didactiek!

Uiteraard zijn bijna alle artikelen in dit nummer gewijd aan het thema 'Rekenen en rekenonderwijs', maar daarnaast bevat dit nummer ook nog enkele andere bijdragen.
Bijgesloten in het vorige nummer van Euclides vond u het zogeheten Manifest Wiskundedidactiek anno 2005, opgesteld namens het bestuur van de Vereniging (zie mogelijk ook www.nvvw.nl/manifest.html). Als uitsmijter van dit nummer vindt u op pagina 260 een uitgebreide toelichting van Anne van Streun op dit manifest. Anne gaat in op diverse ontwikkelingen die de kwaliteit van ons wiskundeonderwijs aantasten, en hij stelt daar verschillende actiepunten tegenover.
Op de Verenigingspagina's vindt u de jaarrede zoals NVvW-voorzitter Marian Kollenveld die op 6 november jl. uitsprak tijdens de jaarvergadering/studiedag. Wat mij persoonlijk daarin met name aansprak, was Marians volgende aanbeveling: 'Laten wij (…) meer vertrouwen op eigen kracht en professionaliteit, niet afwachten maar zelf het initiatief nemen, dat is beter voor u, beter voor uw leerlingen en op de langere termijn ook beter voor het vak.'

Prof.dr. A.W. Grootendorst overleden

Vlak voor het ter perse gaan van dit nummer vernamen wij het verdrietige bericht dat prof. dr. A.W. Grootendorst overleden is. Hij is 80 jaar geworden. Albert Grootendorst was emeritus hoogleraar wiskunde aan de TU Delft en tevens classicus. In een volgend nummer wordt er wat uitgebreider bij zijn leven stilgestaan.

Tweede fase; even rekenen

Dezer dagen worden de nieuwe examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo vastgesteld; het is de bedoeling dat ze er op 1 april a.s. liggen. Zoals u weet worden met name de wiskundeprogramma's voor de NT-profielen drastisch ingesnoeid: er moet formeel zo'n 30% verdwijnen (voor vwo nog iets meer, voor havo iets minder). Daarnaast moet je eigenlijk nog een aantal andere kwesties meenemen in de rekensom: een realistischer kijk op de tijd die de doorsnee-leerling buiten de les daadwerkelijk in schoolwerk investeert, het feit dat er juist geklaagd werd over overladenheid en er inhoudelijk dus een sterkere procentuele inkorting nodig is dan die 30%, het feit dat het examenjaar maar kort is, en ook het vermoedelijke 'afkappen' van de resulterende hoeveelheid wekelijkse contacturen op hele uren (ik verwacht dat 50-minuten-lessentabellen wiskunde B/AB op veel scholen zullen uitkomen op 2-3-3). Aldus komt mijn rekensommetje voor het vwo uit op zo'n 60% van de officiële nieuwe studielast (uitgaand van bijvoorbeeld $35\times2 + 35\times3 + 27\times3$ lessen, te vermenigvuldigen met misschien, optimistisch aangehouden, $50 + 25$ minuten werkelijke studielast per les). Het ministerie wil daarnaast ook nog eens een groot deel (30-40%) van de programma's buiten het Centraal Examen houden. Qua omvang zullen de resterende kernen waarvan de inhoud helder en daadwerkelijk 'afrekenbaar' vastligt, dus slechts een schim zijn van de huidige examenprogramma's.

Uw ideeën over deze kwestie zijn zoals altijd zeer welkom, in eerste instantie bij het bestuur van de Vereniging en daarnaast natuurlijk ook bij de redactie van Euclides - maar de beslissingen worden op zeer korte termijn genomen, dus de tijd dringt.

INHOUD

Aan dit nummer werkte verder mee: Elzeline de Lange.

Voorpagina - **Rekencollage**
Ontwerp: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel

LEESWIJZER

Ter inleiding op het thema 'Rekenen' [Marja Bos]

Rekenen en wiskunde, een onafscheidelijk duo? Rekenonderwijs en wiskundeonderwijs, onlosmakelijk verbonden? Op dit soort uitspraken valt natuurlijk wel het een en ander af te dingen. En toch... Bij rekenen (met getallen werken) *begint* een proces van abstraheren dat zo kenmerkend is voor wiskunde, vervolgens maakt die wiskunde veelvuldig *gebruik* van allerlei rekenmethoden, en tot slot kan wiskunde weer *leiden* tot nieuwe, geavanceerdere rekenmethoden.
Vanwege die verwantschap tussen rekenen en wiskunde leek het de redactie een aardig idee de special dit jaar maar eens te wijden aan het onderwerp *rekenen & rekenonderwijs*. Daarnaast speelden allerlei andere aspecten een rol bij die themakeuze. Ik noem er een paar: de relatieve onbekendheid van veel wiskundedocenten met het huidige rekenonderwijs op de basisschool, het onmiskenbare belang van een goede aansluiting, verschuivende accenten in het rekenwiskundeonderwijs als gevolg van oprukkende technologie en veranderende inzichten, de heruitgave van het in 1604 voor het eerst verschenen beroemde rekenboek *De Cijfferinghe* van Willem Bartjens, technologisch en maatschappelijk ingrijpende ontwikkelingen op het gebied van het 'wetenschappelijk rekenwerk'. Invalshoeken genoeg. In ieder geval stróómden de inzendingen binnen.
We hebben de diverse artikelen overigens niet naar deelthema gerangschikt. Degene die het blad van voor naar achter doorleest, ondervindt de nodige afwisseling in soorten bijdragen. Mocht u gericht op zoek zijn naar een bepaald deelthema (bijvoorbeeld 'historie'), dan biedt deze leeswijzer u enige hulp, in combinatie met de inhoudsopgave hiernaast.

In het openingsartikel beschrijft Marjolein Kool de wijze waarop rekenen op de basisschool tegenwoordig gestalte krijgt. Van haar hand is eveneens een bijdrage over rekenliedjes voor jonge kinderen.
Maar er zijn in dit nummer natuurlijk méér bijdragen te vinden over rekenwiskundeonderwijs op de basisschool en over de aansluiting erop in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Met veel plezier wijs ik u op de artikelen van Vincent Jonker en Frans van Galen, Else Simons en Peter Hoogendijk, Egbert Harskamp en Jan Folkert Deinum, Jan van den Brink, en Ingrid Homans en Klaske Blom.
Het invloedrijke Wiskobas-project wordt in uw herinnering teruggehaald (of: voor het eerst aan u gepresenteerd; dat kan natuurlijk ook!) via een persoonlijke terugblik van Ed de Moor. U leest daarin ook over de effecten op het rekenonderwijs in basisscholen en pabo's.
Ronald Keijzer en Sylvia van Os bespreken de stand van zaken met betrekking tot het rekenwiskundeonderwijs op de pabo's. Daarbij krijgt ook de rekenvaardigheid van pabo-studenten en beginnende basisschoolleraren de nodige aandacht.

Jaap Vedder informeert u over de NVORWO, een zustervereniging van de NVvW, en het NVORWO-blad 'Volgens Bartjens...'

Ruud Jongeling laat zien hoe grafische rekenmachines inzetbaar zijn in de onderbouw van vmbo-BB/KB; Henk Pfaltzgraff doet iets dergelijks voor de hoogste klassen van het vwo.

Via een artikel van Jo Nelissen krijgt u wat meer zicht op het fenomeen 'dyscalculie'.
Zowel landelijk als internationaal gaat de laatste tijd steeds meer aandacht uit naar 'gecijferdheid'. Kees Hoogland praat u bij.

Het 'grote publiek' lijkt in het algemeen meer belangstelling te hebben voor taal- dan voor rekenkwesties. Denk maar eens aan het Groot Dictee der Nederlandse Taal. Toch bestaan er inmiddels ook rekenwedstrijden die het in zich hebben te kunnen uitgroeien tot heel populaire evenementen. Gertrude van Keulen bericht over een Rekendictee dat kort geleden in het kader van de Zwolse Bartjensweek voor het eerst werd georganiseerd, en Chris Zaal doet verslag van het Wereldkampioenschap Hoofdrekenen.

In de loop der tijden zijn aanpak, rol en belang van rekenen en rekenonderwijs voortdurend aan verandering onderhevig geweest. Dat is niet alleen 'leuk om over te lezen', het biedt ook gelegenheid tot reflectie op de huidige situatie. Om die reden zijn er diverse historisch getinte artikelen in dit nummer te vinden, geschreven door Danny Beckers, Otto van Poelje en Simon van der Salm, Harm Jan Smid, Gerard Alberts, Dick Klingens, Jan van de Craats, en Gert de Kleuver. Ook twee recensies, van Chris van der Heijden en Danny Beckers, vallen in deze categorie. Ietwat meer filosofisch getint is de bijdrage van Teun Koetsier en Fredie Beckmans.

Martinus van Hoorn, Frits Göbel en Victor Thomasse pasten hun rubrieksbijdragen aan het thema aan.
Job van de Groep start zijn goochelrubriek met drie rekentrucs, Rob Bosch schrijft over de manier waarop hij zijn KMA-studenten wat meer rekenvaardigheid weet bij te brengen.

Ook enkele van de meest recente rekenontwikkelingen in de wetenschap worden in dit nummer belicht. Arthur Veldman legt uit hoe er binnen het vakgebied van de numerieke wiskunde wordt gerekend aan stromingen, Nicolai Petkov schrijft over 'grid computing', het superrekenen van de nabije toekomst.
En toen waren we wel uitgerekend...

De redactie dankt alle auteurs voor hun bijdragen, en wenst u als lezer veel genoegen!

1 **Wat is de goede maat?**



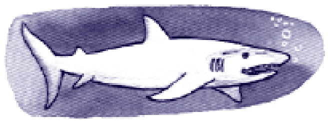
Zoek de maten bij de records hieronder. Kies uit:

mm - cm - m - km
mg - g - kg - ton
cm^2 - m^2 - km^2

De maten mogen meerdere keren gebruikt worden.

a De langste in zee liggende dam is de Nederlandse Afsluitdijk. De dam is maar liefst 32,5 .... lang. De breedte op zeeniveau is 89 ...., de hoogte bedraagt 7,5 ....

b De grootste vis die ooit met een hengel werd gevangen, was een witte haai met een gewicht van 1,2 .... en een lengte van 5,13 ....



c De grootste bekende vlinder is de Queen Alexandravlinder. Vrouwelijke exemplaren kunnen een spanwijdte hebben van meer dan 28 .... en een gewicht van 25 ....
De grootst gemeten vleugeloppervlakte was 263,2 ....

d De grootste oceaan ter wereld is de Grote Oceaan. Hij beslaat een gebied van 166 miljoen .... De gemiddelde diepte is 4188 .... De kortste bevaarbare route over de Grote Oceaan, van Ecuador naar Thailand is 17.550 .... lang.

FIGUUR 1 Een vraagstuk uit *Wis en Reken* voor groep 8. Kinderen oefenen tegenwoordig niet meer eindeloos met maatomzettingen en het metrieke stelsel. Ze moeten maten kunnen hanteren, zich er iets bij voor kunnen stellen en verstandige schattingen kunnen doen. Bron: Wisboek 1, groep 8, Bekadidact, Baarn

REALISTISCH REKEN-WISKUNDEONDERWIJS OP DE BASISSCHOOL

De kloof tussen groep 8 en de brugklas

[Marjolein Kool]

Vooraf

'Wat leren ze nou eigenlijk nog op die basisschool?' Menig wiskundeleraar in de brugklas heeft inmiddels ontdekt dat de gemiddelde leerling niet eens meer het regeltje kent van 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Regeltjes aanleren of een vaste oplossingsmanier inslijpen door middel van lange rijen kale sommen, dat gebeurt niet meer op de basisschool. Maar wat gebeurt er dan wel? In dit artikel een doorkijkje naar de basisschool. Ter geruststelling vooraf: regeltjes spelen nog wél een rol in het basisonderwijs en de tafels van vermenigvuldiging moeten alle kinderen gewoon uit het hoofd leren.

Kleuterwiskunde

De term 'kleuterwiskunde' wekt nog wel eens de lachlust op. Dat is begrijpelijk. Kinderen van vier en vijf jaar oud zijn natuurlijk nog niet toe aan parabolen en de stelling van Pythagoras. Maar in de basisschool moet wel het fundament voor het latere wiskundeonderwijs gelegd worden. Dat begint al in groep 1. Kleuters worden daar bijvoorbeeld regelmatig met meetkundeachtige problemen geconfronteerd: Hoeveel verschillende huisjes kun je bouwen met drie blokken? Hoe kun je van een vierkant vouwblaadje een driehoek vouwen? Hoe kun je van een plat vel papier een echte punthoed maken? Past dit parapluutje in deze koffer? Misschien lukt het wel als je het er schuin in legt? Door lukraak maar wat te proberen of door eerst goed na te denken komen kinderen op oplossingen en doen ze belangrijke meetkundige ervaringen op. Als je hebt gezien dat een wc-rolletje na een duwtje rechtdoor rolt en een koffiebekertje een bocht beschrijft, dan heb je al iets wezenlijks ontdekt over de eigenschappen van de cilinder en de kegel. Dat kan later goed van pas komen. In het moderne realistische reken-wiskundeonderwijs spelen concrete ervaringen, eigen ideeën en zelfbedachte aanpakken een belangrijke rol. Dat geldt niet alleen voor de kleutergroepen.

Leren van en met elkaar

Ook in de overige groepen van de basisschool is het reken-wiskundeonderwijs gebaseerd op de principes van het zogeheten constructivisme. Dat betekent dat kinderen onder leiding van de leerkracht hun eigen reken-wiskundige kennis construeren. Het onderwijs moet daarvoor dan wel aan bepaalde voorwaarden voldoen; kinderen moeten kunnen werken aan rijke en uitdagende problemen, ze moeten de kans krijgen om hun eigen probleemaanpak uit te proberen en hierover met elkaar in gesprek te komen. De docent helpt bij het verwoorden van oplossingen en het vergelijken en beoordelen van verschillende aanpakken en stimuleert kinderen om op een hoger abstractieniveau te gaan werken. Leren van en met elkaar is van essentieel belang. In de navolgende voorbeelden wordt duidelijk hoe kinderen in een gezamenlijke activiteit onder leiding van de leerkracht zelf reken-wiskundige kennis kunnen opbouwen.

De juf van groep 4 heeft een handpop op haar hand. Het is een vogel en hij luistert naar de naam Waku-Waku. Het is een bijzonder dier want hij kan een woord zeggen en hij kan rekenen! Dat willen de leerlingen van groep 4 wel eens meemaken. Het woord dat hij kan zeggen is 'zeven'. Esther waagt een eerste poging: '5 erbij 2' probeert ze. Waku-Waku roept enthousiast: 'Zeven!' En dat roept hij ook als Pim '6 erbij 1' vraagt en Ahmed '3 erbij 4' probeert. Als Steven expres een 'verkeerde' som roept, zwijgt de vogel in alle talen. Er volgen nog een paar sommetjes. Inger bedenkt zelfs nog '0 erbij 7'. Waku-Waku roept nog één keer 'zeven' en dan wordt het stil in de klas. Zou de voorraad op zijn? Opeens roept Birgit: 'Ik weet er nog één! 10 eraf 3, mag dat ook?' Waku-Waku antwoordt: 'Zeven.' Dankzij het goede idee van Birgit kan iedereen ineens weer allerlei nieuwe sommen bedenken.
Bas komt zelfs met een hele sommenrij: '107 eraf 100, 207 eraf 200, 307 eraf 300... Hé, zo kun je wel eindeloos doorgaan!'
Het voorbeeld van Waku-Waku laat zien hoe het er tegenwoordig in het realistische reken-wiskundeonderwijs op de basisschool aan toe kan gaan. Kinderen gaan met elkaar in gesprek, luisteren naar elkaars ideeën en komen zo zelf weer op nieuwe ideeën. Toen Birgit bedacht en vertelde dat aftreksommen ook zeven als uitkomst kunnen hebben, kon iedereen ineens weer verder. Vroeger mocht je elkaar niet voorzeggen, nu geven kinderen elkaar een hint om verder te komen. In het bovenstaande voorbeeld is het niet de juf of meester, maar zijn het de kinderen die de sommen bedenken. Ieder kan dat op zijn of haar eigen niveau doen. Het kind dat '8 eraf 1' inbrengt, levert een prima bijdrage, maar kinderen die al aan moeilijker sommen toe zijn, krijgen hier ook de ruimte. Dat zien we aan de inbreng van Bas, die niet alleen grote getallen aandurft, maar ook nog ontdekkingen doet over de getallenrij: 'Daar zit een patroon in, en dat patroon gaat eindeloos door!' Natuurlijk komt het ook in de hedendaagse rekenles nog steeds voor, dat kinderen individueel aan sommen werken, maar dit wordt afgewisseld met momenten waarop kinderen leren van en met elkaar. Dan wordt de rekenles een klassikale discussie waaraan iedereen zijn steentje bijdraagt en waarin kinderen ideeën kunnen uitwisselen en met elkaar kunnen vaststellen wat de handigste aanpak is.

Opdrachten die aan het denken zetten

De aard van de rekenopdrachten moet wel zo zijn dat er inderdaad iets te discussiëren valt. Over $1 + 1 = 2$ ben je natuurlijk snel uitgepraat. Maar er zijn opdrachten waar heel wat over te overleggen valt, waarmee kinderen een onderzoekende en probleemoplossende houding kunnen ontwikkelen. Neem bijvoorbeeld het volgende probleem: *Als je alles wat je gemiddeld in een maand drinkt (water, thee, melk, frisdrank, enz.) in een badkuip zou gieten, loopt het bad dan over?*



FIGUUR 2 Leren van en met elkaar is een belangrijk kenmerk van het realistische reken-wiskundeonderwijs. Foto: Jasper Oostlander



FIGUUR 3 Waku-Waku kan alleen maar 'zeven' zeggen. Wie bedenkt een som voor hem? Foto: Jasper Oostlander

Vroeger kreeg je zulke vragen niet. Toen ging het om rijen kale maatomzettingen, zoals bijvoorbeeld 1,24 m³ = … dl? Dat was een duidelijke opdracht. Je volgde de trappetjes van het metrieke stelsel, die je uit je hoofd had geleerd en dat was dat. Bij het vraagstuk van de badkuip is veel minder duidelijk wat er moet gebeuren. Kinderen moeten schatten en een eigen oplossingsmanier bedenken. Overigens heb je bij dit vraagstuk je kennis van het metrieke stelsel wel hard nodig. In een frisdrankblikje zit 33 cl. En in een wegwerpbekertje gaat 2 dl. Hoe tel je dat erbij op? En hoeveel liter is dat dan? Bij de nabespreking zullen allerlei maatomzettingen gehanteerd worden, die allemaal verbonden zullen zijn met de concrete context van de badkuip. Met het matentrappetje alleen kom je in het realistische reken-wiskundeonderwijs niet ver. Je moet je iets bij maten voor kunnen stellen en je moet referentiematen hebben. Hoeveel gaat er eigenlijk in een blikje, bekertje, melkpak, emmer? Alleen als je dat weet, kun je een reële schatting doen. In figuur 1 is een opgave uit *Wis en Reken* voor groep 8 te vinden. Dat is een representatief voorbeeld van de vraagstukken waar basisschoolleerlingen tegenwoordig met elkaar over discussiëren.

De handigste manier

Op de basisschool is om te beginnen ruimte voor het individueel of in kleine groepjes werken aan opdrachten. Daarna volgt een klassikale nabespreking waarin ideeën worden uitgewisseld. Zo leren kinderen van en met elkaar. In de nabespreking komen de verschillende aanpakken aan de orde. Welke is het handigst? Dat bepalen de kinderen met elkaar. De vraag naar de handigste oplossingsstrategie dwingt kinderen om op hun aanpak te reflecteren. Wie het goede antwoord heeft gevonden krijgt uiteraard waardering, maar wie dat ook nog op een handige manier heeft gedaan verdient nog meer respect.
Toen aan een groep 7 gevraagd werd om het sommetje 6×249 uit te rekenen, leverde dat vier verschillende aanpakken op:

a. $6 \times 249 = 6 \times 200 + 6 \times 40 + 6 \times 9 = 1494$
b. 6×249, dat is het dubbele van $249 + 249 + 249$ en dat is 1494
c. $6 \times 249 = 6 \times 250 - 6 \times 1 = 1494$
d. 6×249 intikken op de rekenmachine.

In de nabespreking werd duidelijk dat de tweede manier wel heel erg veel tijd kost en dat de derde manier de handigste en snelste is. Dat is een goede manier om te onthouden voor een volgende keer. Misschien kunnen de kinderen zelf nog een paar vergelijkbare sommetjes verzinnen om deze handige aanpak nog eens extra te oefenen, dan worden ze zich meteen goed bewust voor welke sommen deze strategie geschikt is. Er worden dus op de basisschool wel degelijk strategieën ingeoefend, maar daarnaast krijgen kinderen de ruimte om zelf een eigen aanpak te kiezen. Op deze wijze worden ze flexibele rekenaars, die thuis zijn in de getallenwereld, allerlei rekenstrategieën kennen en zich bij elke som opnieuw afvragen: 'Wat is in dit geval de handigste aanpak?'

De rekenmachine

Soms blijkt de rekenmachine de handigste aanpak te zijn. Natuurlijk leren kinderen op de basisschool in de eerste plaats rekenen zonder de rekenmachine, maar dat betekent niet dat de rekenmachine altijd verboden is. Vanaf groep 7 staat hij op het programma. Dat is nodig want leerkrachten hebben allang ontdekt wat er gebeurt als de rekenmachine op de basisschool niet gebruikt mag worden. Zodra de leerlingen in de brugklas wel met zo'n apparaat mogen werken, tikken ze zelfs sommetjes als '2×3' in en zijn ze geneigd elk antwoord dat het apparaat oplevert klakkeloos over te schrijven. Dat is geen wonder, want ze hebben niet geleerd hoe je er verstandig mee om kunt gaan. Ze komen bijvoorbeeld niet op het idee om schattend mee te rekenen met het apparaat en vragen zich zelden bij een som af of 'ie misschien niet handiger, sneller en veiliger zonder apparaat berekend kan worden. Daarom kunnen kinderen op de basisschool maar beter leren in welke gevallen het handig is om een rekenmachine te gebruiken en hoe je met het apparaat en de



FIGUUR 4 Het is belangrijk dat kinderen op de basisschool leren wanneer en hoe ze de rekenmachine kunnen gebruiken. Foto: Jasper Oostlander



FIGUUR 5 Op de basisschool krijgen kinderen de kans om problemen op een concreet niveau aan te pakken. Foto: Frank Roosendaal

antwoorden in de display om moet springen. Dan zullen ze ontdekken dat het apparaat pas voordeel oplevert als je goed kunt rekenen. Want wie goed kan rekenen ziet dat 12,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 hetzelfde is als $6 \times 12{,}5 = 3 \times 25 = 75$. Wie dat niet ziet, zit lang op zijn rekenmachine te tikken en heeft daarbij grote kans om een tikfout te maken. En als je niet weet hoe je de uitkomst kunt schatten, zul je die tikfout niet eens ontdekken. Wie heeft leren nadenken over de handigste oplossingsmanier en daarbij ook de rekenmachine in overweging mag nemen, leert al jong wanneer dat apparaat het beste ingezet kan worden. Kinderen die in de brugklas roepen: 'Op de basisschool mochten we altijd een rekenapparaat gebruiken', liegen maar één woordje: 'altijd' moet 'soms' zijn.

Wat mag je van brugklasleerlingen verwachten?

Wat kun je nou doen als wiskundeleraar, als het sommetje $7\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$ nog steeds grote problemen oplevert in de brugklas? Dan jeuken je handen toch om even snel het regeltje te leren: 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'? Even trainen met een paar voorbeeldsommen en dan gauw verder. Tja, ik kan me voorstellen dat de verleiding groot is, maar misschien kunt u het toch eens op een andere manier proberen. Zet het vraagstuk in een context: *Iemand heeft zelf $7\frac{1}{2}$ liter wijn gemaakt en nu wil hij flessen gaan vullen. In elke fles gaat $\frac{3}{4}$ liter. Hoeveel flessen kan hij vullen?*

Daar zal geen leerling voor terugschrikken. U moet dan echter zelf niet terugschrikken voor de verschillende oplossingsmanieren op verschillende niveaus, die de kinderen zullen aandragen. Kinderen zullen een verhoudingstabel of een dubbele getallenlijn tekenen: 1 fles $\frac{3}{4}$ liter, 2 flessen $1\frac{1}{2}$ liter, 4 flessen 3 liter, enzovoort. Maar het is niet uitgesloten dat er ook kinderen zullen redeneren: '$7\frac{1}{2}$ liter over flessen van $\frac{3}{4}$ liter verdelen, dat is hetzelfde als 15 liter over flessen van $1\frac{1}{2}$ liter verdelen, ofwel 30 liter over flessen van 3 liter verdelen... juf, dit sommetje kan ik uit mijn hoofd!' En tot slot is het niet uitgesloten dat een kind komt met het genoemde regeltje en dus $\frac{15}{2}$ met $\frac{4}{3}$ vermenigvuldigt. Maar wat heeft dat regeltje met de context te maken? Kunnen we het regeltje ook begrijpen? Met 1 liter kun je $\frac{4}{3}$ fles vullen. Met 2 liter kun je dus $2\times\frac{4}{3}$ fles vullen en met $7\frac{1}{2}$ liter kun je $7\frac{1}{2}$ keer $\frac{4}{3}$ fles vullen. Zo kun je ook begrijpen dat delen door een breuk een groter getal oplevert. Voor veel kinderen is dat aanvankelijk een verrassing, want jarenlang leverde een deling altijd een kleiner getal op. Zodra ze de breukenwereld binnen stappen, moeten ze ineens een 'conceptual change' maken en beseffen dat delen door een breuk een groter getal kan opleveren. Binnen de context van de wijnflessen snapt iedereen dat. De kunst is nu om kinderen zo ver te krijgen dat ze op een gegeven moment de context durven te verlaten en op een formeel niveau zullen gaan rekenen. Natuurlijk wordt daar ook op de basisschool naar gestreefd, maar niet alle kinderen zijn daar op hetzelfde moment aan toe. Op de basisschool hebben ze liever dat een kind bij $8:\frac{1}{2}$ niet klakkeloos 4 roept, maar even bedenkt: 'O, ja, 8 liter wijn in flessen van $\frac{1}{2}$ liter, dat is dus 16.'

Als de leraar van groep 8 wat vaker de leerlingen stimuleert om de stap naar het formele niveau te zetten, en als de wiskundeleraar in de brugklas bereid is om af en toe een vraagstuk concreet en voorstelbaar te maken, dan zal de kloof tussen basisschool en basisvorming beslist minder diep worden.

Over de auteur

Marjolein Kool (e-mailadres: m.j.h.kool@domstad.nl) is pabodocent rekenen-wiskunde op Hogeschool Domstad in Utrecht en hoofdredacteur van het tijdschrift 'Volgens Bartjens' voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

REKENWEB

[Vincent Jonker en Frans van Galen]

Inleiding

Op de basisschool wordt steeds meer gebruik gemaakt van ondersteunende software bij de reken-wiskundeles. Veel scholen hebben de software bij de eigen rekenmethode aangeschaft, en andere scholen gebruiken cd-roms van bijvoorbeeld Bruna, Ambrasoft en andere uitgevers. Daarnaast hebben de scholen computers waarmee kinderen het internet op kunnen, en ook daar zijn rekenprogramma's te vinden.
In dit artikel bespreken we het RekenWeb, *www.rekenweb.nl*, dat niet alleen veel bezoekers trekt vanuit het basisonderwijs, maar ook steeds meer vanuit het voortgezet onderwijs, met name brugklas en lwoo.

Het RekenWeb bestaat sinds 1999 en in de loop van de jaren zijn steeds nieuwe programma's aan de verzameling van computerspelletjes en computerprogramma's toegevoegd. De meeste opdrachten hebben een speelse vorm, omdat de pagina's ook bedoeld zijn voor kinderen thuis. Een belangrijk onderdeel op de site is het probleem van de maand; zie figuur 1.
Elke maand gaat het om een nieuwe situatie, met meestal per week een verschillende opdracht. Veel kinderen blijken regelmatig terug te komen naar de site om het probleem van de maand te doen en het grote aantal oplossingen dat we elke maand binnenkrijgen - zowel onder als buiten schooltijd - laat zien dat het RekenWeb gewaardeerd wordt. In heel wat klassen heeft het probleem van de maand zich inmiddels een plek veroverd. De opdrachten van het probleem van de maand krijgen later een vaste plaats op de site.

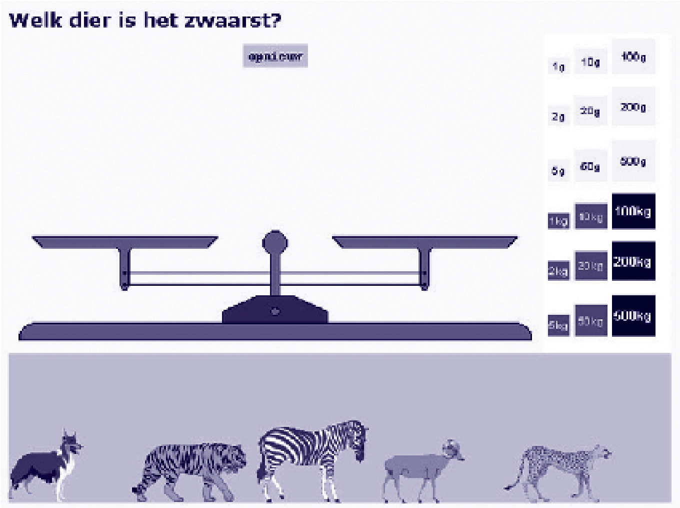
Het RekenWeb biedt overigens veel meer dan alleen computerprogramma's (zie [1]). Het gedeelte voor leerkrachten is in feite omvangrijker dan de kindersite, en biedt toegang tot een rijke bron van ideeën voor reken-wiskundeonderwijs:
- Lesideeën bij allerlei soorten onderwerpen, met werkbladen en achtergrondinformatie. Voor een deel zijn de lesideeën afkomstig van collega-leerkrachten.
- De mogelijkheid om collega's of anderen vragen te stellen over het rekenonderwijs via het Prikbord en via RekenFaq, een basisschool-variant van WisFaq, *www.wisfaq.nl*).
- Ook heeft het RekenWeb een gedeelte voor ouders (zie [7]).

Wat voor computerprogramma's zijn er?

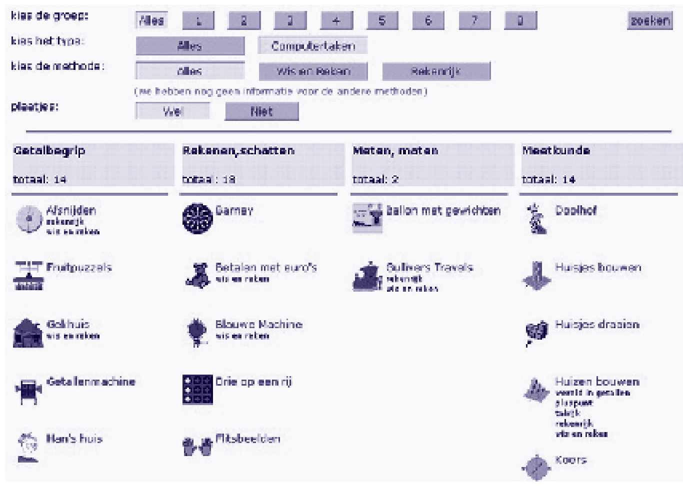
Een overzicht van alle lesideeën, inclusief de computerprogramma's, is te vinden in de RekenWeb Matrix op de lerarenpagina (zie figuur 2).
Veel van de bestaande computerprogramma's voor rekenen zijn eigenlijk oefenspellen. Natuurlijk speelt oefenen een belangrijk rol in het leren rekenen, maar het is slechts de laatste fase van het leerproces. Eerst moeten kinderen inzicht verwerven. In de meeste programma's van het RekenWeb staat dat verwerven van inzicht voorop. Daarbij is deels afstemming gezocht met de bestaande reken-wiskundemethoden in het basisonderwijs (sommige computerprogramma's passen zeer goed bij bepaalde paragrafen uit de methode), maar voor een deel is de software ook afwijkend van onderwerp en aanbiedingsvorm ten opzichte van de standaardaanpak in de methode.
Vaak biedt een RekenWeb-programma gelegenheid om te experimenteren: wat gebeurt er als je het op de ene manier doet, en wat als je het op een andere manier doet? Via dat experimenteren ontdekken kinderen hoe dingen in elkaar zitten (zie [4]).
De meeste computerprogramma's op het RekenWeb zijn bedoeld voor leerlingen van groep 5, 6, 7 en 8 (Van Galen 2002, Van den Brink en Boon 2003). Een deel van deze programma's is goed bruikbaar voor de brugklas. Deze zijn ook als zodanig gemarkeerd op de website. Overigens zijn deze programma's ook te vinden op het WisWeb (zie [8]).

Gebruik in het onderwijs

Bij de computer in het onderwijs wordt nog te vaak gedacht aan leerlingen die in hun eentje achter een



FIGUUR 1 Probleem van de maand oktober 2004: dieren wegen



FIGUUR 2 Overzicht van alle lesideeën

computer zitten en aan een individuele taak werken. Dit geldt zeker voor het vak rekenen. Het is het gevolg van de overvloed aan oefenspellen voor dat vak: oefenen doe je inderdaad het beste individueel. Onderzoekend leren zoals wij dat voorstaan zou een heel ander beeld moeten oproepen:

- De leerlingen zitten in tweetallen achter de computer en proberen samen de opgaven op te lossen. Ze maken daarbij aantekeningen in hun schrift, want ze moeten hun werk later bespreken met de andere leerlingen.
- Regelmatig zijn er klassengesprekken waarin de leerkracht terugkomt op wat kinderen achter de computer hebben gedaan. Leerlingen vergelijken hun aanpak en ze vertellen elkaar wat ze ontdekt hebben.
- De leerlingen bepalen voor een deel zelf wat ze nog verder willen uitzoeken op de computer.

Het beeld dat we hier schetsen verschilt overigens weinig van wat de auteurs van de nieuwe rekenmethoden voor ogen staat bij een deel van de lessen:

- De leerkracht schetst een probleem - een situatie die zich in het echt zou kunnen voordoen - en geeft leerlingen de tijd om daar in groepjes van twee of drie een oplossing voor te zoeken.
- Na vijf of tien minuten vertellen kinderen hoe ver ze met hun groepje gekomen zijn, en ze vergelijken hun aanpak met die van andere groepjes.
- De leerkracht vat samen wat er ontdekt is en bespreekt met de leerlingen wat de volgende stap zou kunnen zijn.

Het verschil met zo'n les is dat de computer een situatie biedt waarin kinderen zelfstandig kunnen experimenteren. Leerlingen zullen daardoor niet gauw vast komen te zitten, en de tijd waarin ze met hun partner zelfstandig bezig zijn kan daarom langer duren dan de vijf of tien minuten in een klassikale les. Leerkrachten die kinderen willen stimuleren tot zelfstandig probleemoplossen zullen de computer dan ook ongetwijfeld een welkome aanwinst vinden in de rekenles.

We bespreken hieronder een aantal voorbeelden van programma's op het RekenWeb die ook heel goed bruikbaar zijn in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs.

Basisvaardigheden

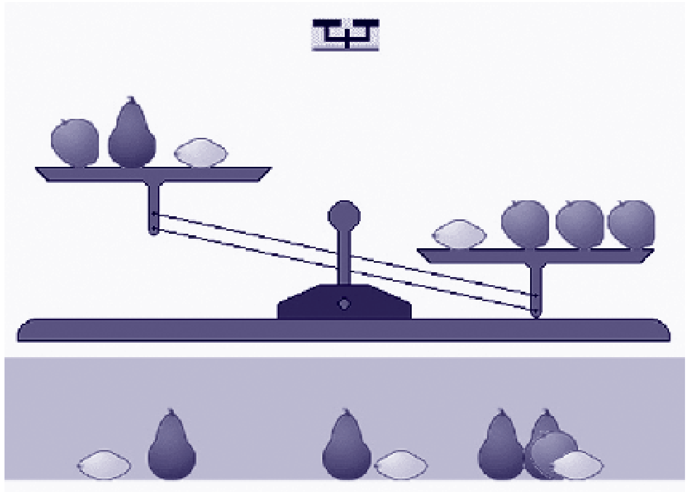
Het is en blijft een belangrijk bestanddeel binnen het rekenonderwijs dat leerlingen zich de basisvaardigheden eigen maken. Eén van de meest populaire voorbeelden hiervan op het RekenWeb is *Vijf op een rij*; zie figuur 3.
Dit spel wordt zeer veel gespeeld (enkele duizenden keren per dag) en voorziet in de behoefte om op een speelse wijze de tafels van vermenigvuldiging te oefenen.

Redeneren met getallen

In *Fruitpuzzels* (zie figuur 4) is de weegschaal in evenwicht als het gewicht aan beide kanten gelijk is. Niet bekend is echter, hoe zwaar alles afzonderlijk is. Dat levert puzzeltjes op waarbij het aankomt op slim redeneren.
De opdracht bij dit spel is: 'Leg fruit op de weegschaal en zorg dat de weegschaal in evenwicht komt. Schrijf op hoe het lukt, bijvoorbeeld: "1 appel en 1 peer wegen evenveel als ..." Er zijn een heleboel zinnetjes mogelijk. Kun je er ook zinnetjes bij maken zonder te wegen?'
Waarschijnlijk zullen kinderen hun eerste zinnetjes vinden via proberen, maar op een gegeven moment ontdekken ze dat de zinnetjes soms erg op elkaar lijken. 'Twee peren wegen evenveel als een citroen, een appel en een peer' lijkt bijvoorbeeld erg op: 'Een peer weegt evenveel als een citroen en een appel.' Eigenlijk kun je al zonder wegen zien dat het tweede zinnetje ook moet kloppen, want als je aan allebei de kanten een peer weghaalt is het logisch dat de weegschaal in evenwicht blijft. Het blijkt uiteindelijk dat er maar een paar zinnetjes nodig zijn om vast te leggen hoe het precies zit met het gewicht van peer, appel en citroen ten opzichte van elkaar.



FIGUUR 3 Vijf op een rij



FIGUUR 4 Fruitpuzzels

De beschrijving zit dan al heel dicht bij het maken van een vergelijking:
1 peer = 1 citroen + 1 appel of 1p = 1c + 1a of p = c + a
Het is niet nodig om hier direct op in te gaan. Beter lijkt het om leerlingen zelf te laten zoeken naar een handige manier van noteren.
Er zijn ook fruitpuzzels waarbij het gewicht van één van de vruchten gegeven is en waarbij de kinderen het gewicht van de andere vruchten moeten zoeken. Deze opgaven zijn concreter, maar ze zijn erg lastig als leerlingen willekeurige combinaties blijven proberen. Een systematische aanpak is te beginnen met bijvoorbeeld een appel links en een sinaasappel rechts en dan net zo lang appels links en sinaasappels rechts neer te leggen, totdat de balans in evenwicht is. Probeer de leerlingen te laten vertellen welke aanpak ze gevonden hebben.

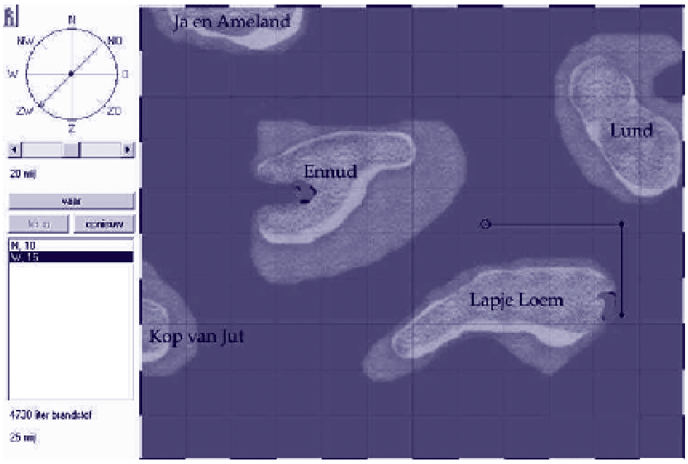
Richtingen (meetkunde)

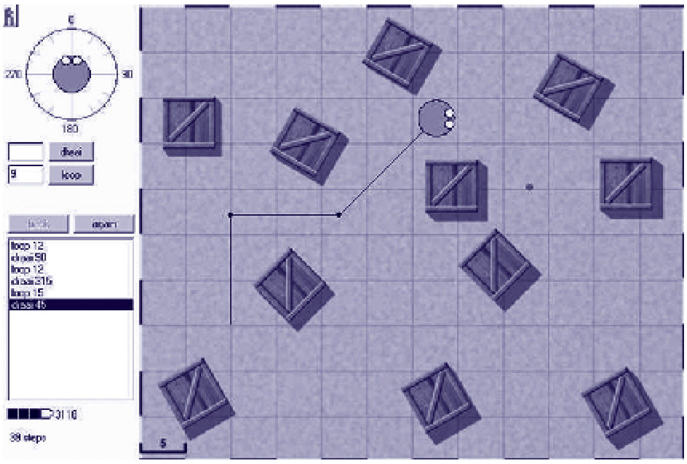
Richtingen kunnen op verschillende manieren worden aangegeven. Als we zeggen dat Hilversum ten noorden van (of 'boven') Utrecht ligt gebruiken we een absoluut systeem van richtingen, want waar we zelf zijn of welke kant we uitrijden doet er niet toe. Als we zeggen dat Hilversum rechts van de A1 ligt, dan gebruiken we een relatief systeem, met links en rechts gedefinieerd ten opzichte van de richting van degene die rijdt.
Koers en *Robot* zijn programma's die sterk op elkaar lijken (zie figuur 5 en 6). Bij *Koers* wordt de richting van de boot aangegeven via de windrichtingen noord, oost, zuid en west en bij *Robot* geven de leerlingen aan hoe de robot moet draaien. Bij *Koers* is, met andere woorden, sprake van een absoluut systeem van richtingen. Bij *Robot* gaat het om de relatieve verandering ten opzichte van de richting die de robot al heeft.
'Kapitein Kwark moet met zijn boot zo snel mogelijk naar het eiland Ennud. Je kunt de richting kiezen waarin de boot moet varen en de afstand. Wat is de kortste weg?'

Er zijn verschillende manieren om naar het opgegeven punt te varen, maar gevraagd wordt naar de kortste route. Door op een handige manier te experimenteren met mogelijke routes zullen kinderen de route-informatie linksonder moeten begrijpen. 'ZW 20' betekent bijvoorbeeld: 20 mijl varen naar het zuidwesten. Ook 'WZW' (west-zuid-west), 'ZZW' enzovoort komen voor. Afstanden moeten worden geschat. De afstand tussen de lijnen van het rooster is 5 mijl.

Vanuit deze spelsituatie in *Koers* gaan we nu naar een relatieve beschrijvingswijze in *Robot*.
'De robot moet naar de rode punt lopen, want daar kan hij zich weer opladen. Je kunt de robot laten draaien en je kunt hem vertellen hoe ver hij moet lopen. Wat is de kortste route tussen de kisten door?'
Het draaien van de robot moet worden opgegeven met een getal tussen 0 en 360, dus in graden. De term 'graden' hoeven kinderen overigens niet te kennen. Na verloop van tijd zullen kinderen ontdekken waar de kleine streepjes op de cirkel voor staan: stappen van 30 en stappen van 45.
Je kunt ook met negatieve getallen werken, al wordt dat er in de uitleg niet bij verteld. Om de robot 90 graden naar links te laten draaien kun je '270' intypen, maar ook '-90'.

Een belangrijke kanttekening die we moeten plaatsen bij dit type software, is dat de fysieke beleving van de ruimte bij het kind voorop moet staan. Deze computerprogramma's krijgen dus pas hun waarde als een en ander vooraf is gegaan door activiteiten waarbij de leerling zelf de robot is en zelf leert bewegen in de ruimte met begrippen als 'links' en 'rechts'. Het RekenWeb kan dus slechts een aanvulling zijn op activiteiten die in de klas plaatsvinden.
Deze meetkunde-computerprogramma's zijn overigens qua curriculum makkelijk in te passen op de basisschool. Meetkundeactiviteiten in de basisschoolmethode hebben doorgaans de vorm van





FIGUUR 5 Koers

FIGUUR 6 Robot

korte, afgeronde projectjes, wat het betrekkelijk eenvoudig maakt om een meetkundeonderdeel uit de methode te vervangen door een activiteit waarbij de computer wordt gebruikt. Daar komt bij dat meetkunde in het basisonderwijs geen strakke opbouw heeft. Het gaat er om dat kinderen leren redeneren over ruimtelijke ervaringen en daarbij is maar af en toe bepaalde kennis per se nodig voor het zetten van de volgende stap. Meetkunde is echter geen makkelijk onderwerp voor een leerkracht uit het basisonderwijs. Bovendien worden meetkundeonderdelen vaak overgeslagen, omdat men zijn handen al vol heeft aan de rekenstof van breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen.

RekenWeb in het voortgezet onderwijs

We merken - onder andere uit reacties via de e-mail - dat docenten wiskunde uit het voortgezet onderwijs de weg naar het RekenWeb hebben gevonden en bepaalde programma's inzetten voor remediërende activiteiten, aanvullende activiteiten in de brugklas en dergelijke. We werken op dit punt overigens nauw samen met de makers van het WisWeb. We bieden deels dezelfde programma's en spelletjes aan om het overlapgebied tussen basis- en voortgezet onderwijs eenvoudiger te kunnen ondersteunen (zodat gebruikers weinig hoeven te zoeken).
De opzet van het RekenWeb (met onder andere ook het *Probleem van de maand*, elke maand een uitdagend probleem voor 10- tot 13-jarigen) lijkt zich ook te lenen voor nieuwe onderwijsvormen die ontstaan in de nieuwe onderbouw van het voortgezet onderwijs (het zelfstandig werken in groepen, gedurende langere tijd aan één onderwerp werken, en dergelijke). In overleg met WisWeb willen we kijken of we hier specifiek aanbod kunnen creëren.
We krijgen ook feedback uit de groep van docenten wiskunde die participeren in het 'Netwerk Wiskunde 2010', waarin een groep van docenten van diverse scholen voor voortgezet onderwijs en enkele medewerkers van het Freudenthal Instituut informatie en materialen uitwisselen met betrekking tot de wiskunde in de nieuwe onderbouw. Via RekenWeb en WisWeb zullen we gebruikers op de hoogte houden.

Tot ziens op het internet!

Literatuur

[1] N. Boswinkel, V. Jonker: Op het net kun je rekenen - Web + Netwerk = Rekennet. In: Willem Bartjens, tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, 19(5), pp. 9-13 (2000).
[2] J. van den Brink, P. Boon, V. Jonker: Basisvaardigheden ruimtemeetkunde op de computer. In: Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 22(1), pp. 30-35 (2002).
[3] J. van den Brink, P. Boon: De computer als blokkendoos. Groningen: Wolters-Noordhoff (2003).
[4] F. van Galen: De rol van problemsolving-computertaken in reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. In: Panama-Post, tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 18(4), pp. 29-35 (2000).
[5] F. van Galen: Cirkel- en staafdiagrammen in een leergang procenten. In: Panama-Post, tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 20(4), pp. 21-28 (2002).
[6] F. van Galen, V. Jonker: Rekensoftware op internet - Het RekenWeb gebruik in de klas. DoIt reeks. Bodegraven: Instruct, p. 94 (2003).
[7] V. Jonker: Wat ouders willen weten. In: Willem Bartjens, tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, 23(1), pp. 20-21 (2003).
[8] M. van Reeuwijk: WisWeb-studiedag, over applets toen, nu en straks. In: Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 21(3), pp. 27-28 (2002).
[9] M. Vos, G. Kromdijk e.a.: De Rekenmarkt. In: Willem Bartjens, tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, 19(2), pp. 36-38 (1999).

Over de auteurs

Vincent Jonker (e-mail: vincent@fi.uu.nl) en Frans van Galen (e-mail: f.vangalen@fi.uu.nl) zijn beiden werkzaam als onderzoeker bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

REKENEN-WISKUNDE EN DIDACTIEK OP DE PABO

[Ronald Keijzer en Sylvia van Os]

Samenvatting

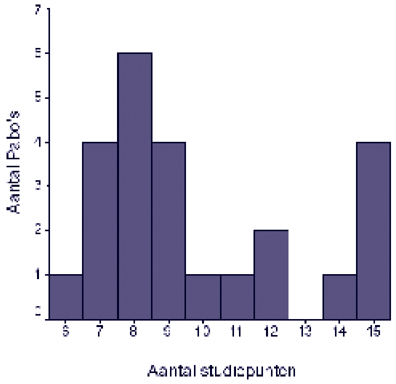
De lerarenopleidingen basisonderwijs zijn in beweging. Die ontwikkeling lijkt niet altijd even gunstig voor het vak rekenen-wiskunde. In dit artikel wordt stilgestaan bij percepties van opleiders rekenen-wiskunde & didactiek over de vernieuwingen. Wat is de stand van zaken m.b.t. rekenen-wiskunde op de Pabo? Waar liggen de zorgen van de opleiders? Nagegaan wordt welke kansen er in de ontwikkelingen liggen om te zorgen voor startbekwame leerkrachten, met name ten aanzien van rekenen-wiskunde.

Inleiding

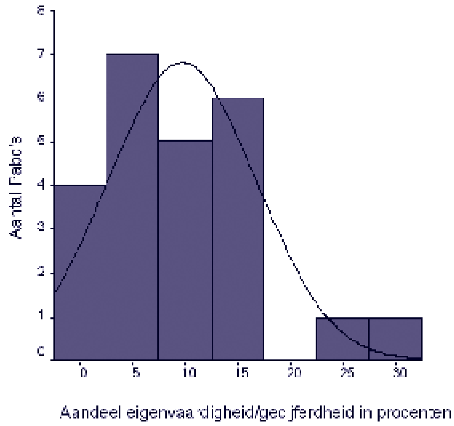
De lerarenopleiding basisonderwijs (Pabo) staat al jaren slecht bekend. Je moet veel doen, maar moeilijk is het niet, luidt de algemene opinie (Stevens, 2003). Ook over de reken-wiskundige vaardigheden van Pabo-studenten blijkt iedereen het eens. Ze kunnen nauwelijks rekenen, is een vaak gehoorde klacht. Opleiders kennen de klachten en kennen ook nuanceringen. De opleidingen stellen vaak strenge eisen aan de gecijferdheid van studenten, wat er toe leidt dat veel – maar niet alle – studenten inmiddels met voldoende rekenvaardigheid de opleiding afronden. De opleiding is in ontwikkeling en al jaren wordt er gewerkt om de opleiding meer diepgang te geven. Er wordt nagedacht hoe keuzes kunnen worden gemaakt die de veelheid inperken en zorgen voor een hoog niveau van de opleiding (Kok, 2004). Dat valt overigens niet mee als de breedte van de taak van leraar basisonderwijs in beschouwing wordt genomen.

De opleidingen zijn als gevolg van de laatste visitatieronde in beweging. De opleidingen worden meer competentiegericht ingericht, waarbij de beroepstaak centraal staat. In het verlengde hiervan kiezen Pabo's voor een opleidingsmodel waarbij studenten zelf grote vrijheid krijgen hun opleiding in te vullen.
Dit vraagt om gedegen overdenking van waarborgen voor de kwaliteit van de opleiding. Studenten komen in het algemeen niet naar een lerarenopleiding basisonderwijs, omdat zij geïnteresseerd zijn in rekenen-wiskunde of daarmee samenhangende leerprocessen. Anderzijds mag van hen verwacht worden, dat ze ook voor rekenen-wiskunde bekwaam aan de start verschijnen.
Opleiders hebben zo hun bedenkingen bij deze ontwikkelingen. Vooral omdat de indruk wordt gewekt dat domeinspecifieke expertise, bijvoorbeeld die in rekenen-wiskunde & didactiek, er steeds minder toe doet. 'Je wordt op mijn opleiding met de nek aangekeken, als je je tegenwoordig nog vakdocent rekenen-wiskunde & didactiek noemt', aldus de verzuchting van een opleider die grote moeite heeft met vernieuwingen die op dit moment worden doorgevoerd in de vormgeving van het opleidingsonderwijs aan de lerarenopleidingen basisonderwijs. Opleiders worden tegenwoordig aangeduid als opleidingsdocenten die geacht worden alle opleidingstaken op zich te kunnen nemen. Deze nieuwe opleidingsdocenten zijn (algemene) stagebegeleiders, tutoren of mentoren. Zij verzorgen onderdelen van vakoverstijgende modulen en zijn daarmee vooral bezig met het overdragen van algemene beroepsvaardigheden: de organisatie van het onderwijs en het reflecteren op het leren van de student zelf en dat van de kinderen – zonder oog voor een vakspecifieke invulling hiervan.

De verzuchting van deze collega zet ons aan het denken. Zien we hier een uiting van de pijn van het vernieuwen van opleidingsonderwijs? Of is er werkelijk iets mis met de kwaliteit van het opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde & didactiek, in de zin dat beginnende leerkrachten onvoldoende voorbereid aan de start verschijnen?[1]
We willen nagaan hoe opleiders rekenen-wiskunde & didactiek denken over de huidige veranderingen en hoe dit van invloed zal zijn op de kwaliteit die zij binnen hun vakgebied kunnen realiseren. We analyseren daartoe enquêtegegevens uit 2001. Genoemde ontwikkelingen waren ook toen al aan de orde; het leidde tot enige onrust in kringen van opleiders die zich verantwoordelijk voelen voor de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs.



FIGUUR 1 Aantal studiepunten rekenen-wiskunde & didactiek



FIGUUR 2 Aandeel eigenvaardigheid/gecijferdheid in procenten

Vragen stellen

We kiezen een bijeenkomst voor opleiders in november 2001 als moment om de opleiders een vragenlijst[2] voor te leggen. Vrijwel alle opleidingen zijn tijdens de bijeenkomst vertegenwoordigd. Dat maakt een grote respons mogelijk en biedt ons daarom de kans ons beeld te verhelderen en te completeren.

We vroegen de opleiders naar de studielast voor rekenen-wiskunde en de inrichting van de opleiding. Het aantal studiepunten is ontegenzeggelijk mede bepalend voor de aandacht die studenten aan een vak of studieonderdeel schenken. Voor het op een adequate manier invullen van het opleidingscurriculum voor rekenen-wiskunde & didactiek is een aanzienlijke studielast noodzakelijk; een aantal van ongeveer 20 studiepunten (van ieder 40 studiebelastingsuren) voor rekenen-wiskunde & didactiek is daarvoor ooit als richtlijn becijferd (adviesgroep 'rekenen-wiskunde & didactiek en informatie- en communicatietechnologie', 1998). Omdat veel opleidingen er inmiddels voor kiezen rekenen-wiskunde in te bedden in vakoverstijgende studieonderdelen, is moeilijk na te gaan welke tijd er aan het vak wordt besteed. Dat was eind 2001 niet anders. We vragen de opleiders rekenen-wiskunde & didactiek toch naar het aantal studiepunten dat de opleiding heeft ingevuld voor rekenen-wiskunde & didactiek (zonder de studiepunten die zijn gereserveerd voor specifieke studieonderdelen eigen vaardigheid of gecijferdheid), en in welke jaren deze studiepunten worden toegekend. We vragen ook naar de studielast die is berekend voor de eigen vaardigheid of gecijferdheid van de studenten.

We vroegen de Pabo-docenten om aan te geven in hoeverre er in hun perceptie op hun opleiding voldoende aandacht is voor didactiek en vakinhouden rekenen-wiskunde en voor de eigen vaardigheid van studenten. Verder mogen zij reageren op een aantal stellingen die in bepaald opzicht veelgehoorde zorgen van opleiders verwoorden: er is onvoldoende (contact-)tijd om het vak aan de orde te stellen en te werken aan de gecijferdheid van studenten, samenwerking tussen vakken wordt wel gepredikt en beoogd maar komt onvoldoende van de grond, en er is nauwelijks meer gelegenheid praktijkervaringen van studenten in te zetten in het opleidingsonderwijs.

Opbrengst van de peiling

Van een aanzienlijk aantal opleiders ontvingen we een ingevuld vragenformulier. Hier proberen we na te gaan hoe deze enquêtegegevens ons een beeld geven van het vigerende opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde & didactiek en van percepties van opleiders over de mogelijkheden die zij zien om hun studenten voor te bereiden op het onderwijzen van rekenen-wiskunde & didactiek in de basisschool. We geven eerst een overzicht van de uitkomsten met betrekking tot de meer objectieve gegevens van de opleidingen, waarna we overgaan op de percepties van de opleiders.

Rekenen-wiskunde en didactiek in de opleiding

Uit de gehouden peiling blijkt dat het aantal studiepunten rekenen-wiskunde & didactiek per opleiding in het studiejaar 2001-2002 sterk uiteen loopt. Terwijl een enkele opleiding slechts 6 studiepunten besteedt aan rekenen-wiskunde & didactiek en de meeste opleidingen met het aantal studiepunten tussen 7 en 10 uitkomen, komt het ook voor dat deze studielast 15 studiepunten bedraagt. In figuur 1 is dit duidelijk te zien. Opvallend aan de grafiek is dat het suggereert dat er twee typen Pabo's zijn: die met weinig studiepunten voor rekenen-wiskunde & didactiek en opleidingen waar hieraan veel meer onderwijstijd wordt besteed.
Wanneer we bij het bepalen van het aantal studiepunten rekenen-wiskunde de studielast voor gecijferdheid buiten beschouwing laten, zien we een variatie in studiepunten van 5 tot 14½. De opleidingen ruimen voor de 'eigenvaardigheid' of gecijferdheid tussen de 0 en 3 studiepunten in. Daarmee haalt geen van de opleidingen de door de adviesgroep 'rekenen-wiskunde & didactiek en informatie- en communicatietechnologie'

voorgestelde omvang van 20 studiepunten. Verder vonden wij grote verschillen tussen de opleidingen in het aandeel van aandacht voor gecijferdheid ten opzichte van de aandacht voor de studieonderdelen 'didactiek'. Het aandeel van de studiepunten eigenvaardigheid of gecijferdheid ligt tussen de 0 en 30% (zie figuur 2).
Verder gaven veel opleiders aan dat het aantal studiepunten in het vierde jaar sterk afhankelijk is van de keuze van de student. Afhankelijk van deze voorkeur varieert in dit jaar het aantal punten van géén studiepunt tot 10 studiepunten.
Er is alle reden om aan te nemen dat het beeld anno 2001 overeenkomt met de situatie in de verder vernieuwde curricula. Omdat er een tendens is naar meer vakoverstijgend werken, zal het gemiddelde aantal studiepunten voor rekenen-wiskunde waarschijnlijk nog iets kleiner zijn. Verder is er nog altijd aandacht voor de gecijferdheid van de studenten en is men, zo dit nodig is, steeds meer geneigd studenten daarop tijdig af te rekenen (vgl. Kok, 2004).

Het curriculum

Kijken we naar het curriculum van de opleiding, dan valt op dat er een groot verschil is tussen de Pabo's. Een deel van de opleidingen kan nadrukkelijk getypeerd worden als probleem- of ontwerpgestuurde opleidingen, terwijl andere opleidingen in 2001 duidelijk kozen voor een leerstofgestuurde invulling van het curriculum. Opmerkingen van de visitatiecommissie (in 2003) dat dit niet meer van deze tijd is, zullen inmiddels geleid hebben tot een afname van het aantal opleidingen dat leerstofgestuurd werkt. De antwoorden op de vraag of het algemene curriculum thematisch of cursorisch is opgezet laten zien dat de opzet van de opleidingen veel verschilt. We zien bij de individuele opleidingen overigens nauwelijks verschuivingen van het eerste studiejaar naar de volgende studiejaren. Dit betekent waarschijnlijk dat het thematische of cursorische karakter van de opleidingen voortkomt uit de vormgegeven visie op opleiden. De opleiding werkt vanuit een visie waarop de gehele opleiding wordt ingericht. Ook hier zal de stand van zaken anno 2001 achterhaald zijn, omdat de visitatiecommissie zich ook hier over uitliet. Het cursorisch inrichten van het curriculum, zo stelde de commissie, is inmiddels achterhaald.

We bevroegen de opleiders ook op de inbreng van de studenten in het vormgeven van het eigen onderwijsprogramma. We zagen dat vooral in het eerste leerjaar het voornamelijk de opleiding is die de inhoud van het curriculum vaststelt. In de loop van de opleiding bepaalt de student gaandeweg meer zelf de inhoud van het curriculum. Het valt op dat de Pabo's na leerjaar 3 hierin sterk gaan verschillen. Dit blijkt verder uit studielast in het vierde jaar voor rekenen-wiskunde & didactiek, die sterk afhankelijk is van de keuze van de individuele student.
Eenzelfde (maar minder sterke) trend is waar te nemen bij de beantwoording van de vraag of de opleiding of de student zelf de *manier* bepaalt waarop het curriculum wordt gevolgd. In het eerste leerjaar wordt die manier in het algemeen door de opleiding bepaald, waarna een lichte verschuiving plaatsvindt in de richting van keuzevrijheid voor de student. Ook hier worden de verschillen tussen Pabo's vanaf het derde leerjaar groter.
Het vraaggestuurd werken, waarbij de opleiding nadrukkelijk wordt afgestemd op zogeheten eerder verworven competenties van studenten, wordt inmiddels in veel opleidingen verder uitgewerkt. Daarbij is overigens wel duidelijk dat studenten kennis in huis moeten hebben om goed in staat te zijn eigen leervragen te stellen.

Percepties opleiders

We gaven reeds aan dat het aantal studiepunten rekenen-wiskunde & didactiek per opleiding zeer sterk uiteenloopt. Wanneer aan opleiders om hun mening wordt gevraagd over de aandacht die het vak krijgt in het curriculum, geeft de helft van hen aan dat het vak onvoldoende aandacht krijgt. Voor de gecijferdheid van de student is er volgens driekwart van de opleiders te weinig onderwijstijd. Dat betekent overigens niet dat met grote regelmaat ongecijferde studenten de opleiding met een diploma verlaten. Het gevoelde gebrek aan onderwijstijd kan een gevolg zijn van het moeten toezien dat studenten voortijdig de opleiding verlaten, omdat ze niet op eigen kracht voldoende gecijferdheid verwerven.
Ruim de helft van de opleiders vindt verder dat er te weinig aandacht is voor de overige onderdelen. Onder overige onderdelen verstaan zij voornamelijk zorgverbreding, gerichte vakstage en het ontwerpen van onderwijs.

Opleiders zijn in 2001 over het algemeen ontevreden over de aandacht die het vak krijgt in de opleiding. Dit wordt nogmaals bevestigd wanneer wij ze vragen aan te geven of zij de toegemeten opleidingstijd onvoldoende vinden. Opleiders stellen dat zij binnen de gestelde uren de didactiek en de eigenvaardigheid of gecijferdheid van studenten niet optimaal kunnen helpen ontwikkelen. Gezien de eerder geschetste ontwikkelingen mag men veronderstellen dat dit ook in 2005 nog geldt. De indruk bestaat dat bij meer studiepunten de opleider vaker de mening is toegedaan voldoende tijd te hebben voor eigen rekenvaardigheid of gecijferdheid en rekenen-wiskunde & didactiek. Uit de enquête blijkt een licht verband, maar dit verband is niet significant.
Een ruime meerderheid van de opleiders vindt daarnaast dat er onvoldoende contacturen zijn in verhouding tot het aantal zelfstudie-uren.
Driekwart van de opleiders vindt dat de afstemming tussen praktijk en theorie goed lukt.
De opleiders zijn het verder niet eens met de stelling dat er genoeg samenwerking is tussen docenten rekenen-wiskunde & didactiek en docenten van andere vakken.

De in de enquêteantwoorden geformuleerde mening over het contact tussen Pabo en basisschool is niet eenduidig. We stellen echter ook vast dat een groot aantal opleiders hun mening over deze stelling niet hebben ingevuld. Dat kan betekenen dat de vraag niet duidelijk was. Een andere interpretatie kan zijn dat de relatie van de opleider met de basisschool in het vormgeven van het opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde & didactiek niet zo'n grote rol speelt.

Kansen en bedreigingen

De inventarisatie van gegevens over rekenen-wiskunde & didactiek op de opleidingen voor het basisonderwijs maakt helder zichtbaar waar de zorgen van de opleiders liggen. Zij geven duidelijk aan dat er in hun ogen te weinig aandacht is voor rekenen-wiskunde & didactiek. In de reacties klinkt door dat de opleiders het moeilijk vinden om startbekwame leerkrachten af te leveren die in staat zijn op adequate wijze leerlingen in het basisonderwijs te begeleiden bij het verwerven van rekenen-wiskunde.

De opleiding is in beweging en dergelijke bewegingen leiden in het algemeen tot gevoelens van onzekerheid. Maar is er hier niet meer aan de hand? Opleiders rekenen-wiskunde en didactiek voelen zich (uiteraard) verantwoordelijk voor de kwaliteit van de studenten voor het vak rekenen-wiskunde. En deze verantwoordelijkheid strekt zich ook uit tot het rekenonderwijs dat de afgestudeerde student verzorgt in de basisschool. In veel gevallen is daarop weinig aan te merken en geeft de beginnende leerkracht met enthousiasme les en weet leerlingen voldoende vaardig te maken in rekenen-wiskunde.

Maar soms loopt dat minder goed. Wanneer de opleiding onvoldoende waarborgen inbouwt voor het bereiken van deze kwaliteit voor rekenen-wiskunde, dan kan het in de praktijk ernstig mislopen. De juf of meester staat dan wellicht ongecijferd voor de klas en weet geen antwoord op vragen van leerlingen die worstelen met bijvoorbeeld breuken of procenten. Dat is niet ondenkbaar, omdat de opleidingen niet consequent studenten afwijzen, die nu juist het studiepunt gecijferdheid missen. En belangrijker, deze leerkracht is niet in staat leerlingen te enthousiasmeren voor rekenen-wiskunde en laat het rekenen verworden tot het langdurig inslijpen van onbegrepen rekenregels.

De huidige ontwikkelingen bieden kansen voor rekenen-wiskunde. De commissie Kok (2004) geeft de opleidingen aan keuzen te maken. En daarvoor is rekenen-wiskunde bij uitstek geschikt, omdat het naast vakspecifieke elementen ook veel elementen in zich heeft die te maken hebben met het verwerven van algemene vaardigheden die nodig zijn voor het beroep van leraar basisonderwijs. Wanneer de opleidingen ervoor kiezen om rekenen-wiskunde zo tot een van de kernen van het opleidingsonderwijs te maken snijdt het mes aan vele kanten, en de vraag is of de opleidingen dat aandurven. De studenten leren rekenonderwijs te verzorgen, er is nadrukkelijke aandacht voor de gecijferdheid van de studenten en ze ontwikkelen zich tot startbekwaam leraar basisonderwijs, die in staat is in de eigen klas een uitdagende leeromgeving te ontwikkelen.

Dit artikel is een bewerking van een eerder verschenen artikel in 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' (Keijzer & Van Os, 2002).

Noten

[1] Zie hiervoor in onderstaande literatuur bijvoorbeeld:
- Goffree, Dolk (1995);
- Startbekwaamheden leraar primair onderwijs. Deel 1: Startbekwaamheden en situaties (1997);
- Adviesgroep 'rekenen-wiskunde & didactiek en informatie- en communicatietechnologie' (1998);
- Oonk (2000);
- Keijzer, Uittenbogaard (2001).

[2] Met dank aan H. Paus voor het beschikbaar stellen van een vragenlijst die is voorgelegd aan opleiders Nederlands en didactiek, die wij konden gebruiken bij het vormgeven van de door ons voorgelegde lijst.

Literatuur

- Adviesgroep 'rekenen-wiskunde & didactiek en informatie- en communicatietechnologie': Het gemeenschappelijk curriculum van de Pabo. De plaats van rekenen-wiskunde & didactiek met gebruik van informatie- en communicatietechnologie daarin. In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 17(1), 1998. pp. 3-23.
- F. Goffree, M. Dolk (red.): Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo. Enschede/Utrecht: SLO/NVORWO (1995).
- R. Keijzer, W. Uittenbogaard: Het kanaal nummer 76. Open brief. In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 20(1), 2001. pp. 27-29.
- R. Keijzer, S. van Os (2002): Rekenen-wiskunde & didactiek anno 2002. In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 20(3), 2002. pp. 17-20.
- Kerndoelen basisonderwijs. Den Haag: SdU (1998).
- J. Kok: Koersen op meesterschap. Den Haag: LOBO/HBO-raad (2004).
- W. Oonk: De professionaliteit van de leraar. Deel 1: verhalen van de praktijk. In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 18(4), 2000. pp. 9-19.
- Startbekwaamheden leraar primair onderwijs. Deel 1: Startbekwaamheden en situaties. Utrecht: APS (1997).
- L. Stevens: Moed tot meesterschap. Eindrapport van de visitatie-commissie Opleiding tot Leraar Basisonderwijs 2003. Den Haag: HBO-raad (2003).

Over de auteurs

Ronald Keijzer (e-mailadres: R.Keijzer@fi.uu.nl) is opleider rekenen-wiskunde aan de Hogeschool IPABO in Amsterdam en werkzaam bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
Sylvia van Os (e-mailadres: S.vanOs@domstad.nl) is opleider rekenen-wiskunde aan de Hogeschool Domstad in Utrecht.

OPSTAP, OVERSTAP EN INSTAP

De aansluiting van wiskunde in de basisvorming op rekenen in het basisonderwijs

[Peter Hoogendijk en Else Simons]

Inleiding

Iedere docent wiskunde die lesgeeft in de brugklas merkt het: de leerlingen komen niet allemaal met dezelfde voorkennis van de basisschool. Vaak neemt de wiskundemethode het zekere voor het onzekere en kiest het instapniveau aan de lage kant. Toch zijn er ook onderwerpen die voor veel leerlingen hoog gegrepen blijken te zijn. De aansluiting op het rekenen van de basisschool is dus zeker voor verbetering vatbaar.

In dit artikel maken we een eerste analyse van deze aansluitingsproblematiek. Als uitgevers kijken we daarbij uiteraard naar methodes voor rekenen (basisonderwijs) en wiskunde (voortgezet onderwijs). We letten daarbij met name op de inhoud en minder op de didactiek.

Overeenkomsten

Bij het bekijken van de methodes voor rekenen en wiskunde vallen allereerst de overeenkomsten op. Het gaat in het basisonderwijs niet alleen over rekenen, maar ook over wiskunde. In de basisvorming is rekenen een onderdeel van het vak wiskunde. Het gaat daarbij steeds over realistisch reken-wiskundeonderwijs. Problemen worden vanuit contexten aangeboden, er worden modellen gebruikt, er worden meerdere strategieën gebruikt en de mate van abstractie wordt voorzichtig opgebouwd (progressief schematiseren).

Overigens komen ook de recent vernieuwde kerndoelen voor basisonderwijs en voor de nieuwe onderbouw sterk overeen. Ter illustratie de verwoording van twee nieuwe kerndoelen:

Kerndoel rekenen/wiskunde (basisonderwijs)	Kerndoel wiskunde (nieuwe onderbouw)
De leerlingen leren wiskundetaal te gebruiken.	De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.
De leerlingen leren praktische en formele reken/wiskundeproblemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.	De leerling leert alleen en in samenwerking met anderen praktische en formele wiskundige problemen oplossen.

3 Alles naar verhouding.

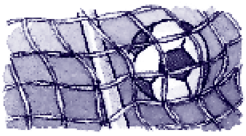


a De dijkenfietstocht is 78 km lang. Na $1\frac{1}{2}$ uur hebben we 19,5 km afgelegd. Hoeveel tijd hebben we ongeveer nodig voor de hele tocht?

KANOVERHUUR	
half uur	€ 2,75
een uur	€ 4,50
halve dag (6 uur)	€ 24,90
3 uur	€ 11,50
$1\frac{1}{2}$ uur	€ 5,50

b Dit zijn de prijzen bij verschillende verhuurbedrijven. Wat is het voordeligst?

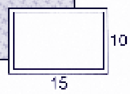
★ Zet de prijzen in volgorde.



c Martijn heeft in 36 wedstrijden 24 doelpunten gemaakt. Bert scoorde 15 keer in 18 wedstrijden. Wie had de beste score?

d Welke vergroting kan van deze foto worden gemaakt?

VERGROTINGEN
15 bij 25
32 bij 48
30 bij 40



e

RACKET	MEP € 35,40	TEMPO
3 stuks € 9,45	doos 12 stuks	4 stuks € 11,40

Welke tennisballen zijn het voordeligst?

f Daans auto rijdt 1 op 13,5. Gisteren moest Daan naar Groningen. Na 189 km stopte zijn auto, omdat de benzine op was.
Hoeveel liter zat er in de tank toen Daan van huis vertrok?

80 Marktkoopman Albert Heldoorn verkoopt sinaasappels.
Hij vraagt 3,5 euro voor 12 sinaasappels.
Een klant wil 30 sinaasappels.
Om uit te rekenen hoeveel dat kost maakt Albert een verhoudingstabel.

a Maak een verhoudingstabel voor Albert.
b Hoeveel kosten 30 sinaasappels?

FIGUUR 1a De wereld in getallen, groep 8, 8A, p. 10
FIGUUR 1b Getal en Ruimte 1 havo-vwo, p. 57

Didactische verschillen

Natuurlijk zijn er ook verschillen. Een rekenmethode voor het basisonderwijs ziet er heel anders uit dan een wiskundemethode voor het voortgezet onderwijs. Er is bijvoorbeeld geen apart hoofdstuk over meetkunde: de meetkundeonderwerpen komen verspreid over de verschillende hoofdstukken voor. Dat maakt het lastig om je als docent een goed beeld te vormen van de inhoud en het niveau van de aangeboden leerstof. Dat wordt versterkt door het ontbreken van expliciteringen van de leerstof: er staan geen samenvattingen en theoriestukjes in. In de handleidingen is deze informatie uiteraard wel te vinden, maar dat zijn lijvige boekwerken.
Opvallend is bovendien dat in het basisonderwijs structureel wordt gewerkt met het onderscheid in leerkrachtgebonden activiteiten en activiteiten voor zelfstandig werken. Van iedere opgave wordt dus aangegeven of deze samen met de leerkracht gemaakt wordt, of dat kinderen er zelfstandig aan gaan werken. Bedenk ook dat in groep 8 niet gewerkt wordt met verschillende boeken voor de verschillende niveaus zoals in de brugklas het geval is. Alle kinderen met verschillende niveaus zitten nog bij elkaar en werken uit hetzelfde boek. In de praktijk komt het wel voor dat een deel van groep 8 werkt uit de boeken voor groep 7 of groep 6.

Inhoudelijke verschillen: voorbeelden

Zoals aangegeven richten we onze blik vooral op de inhoudelijke verschillen. We volgen daarbij de gebruikelijke indeling van het wiskundeprogramma in leerstofdomeinen:
- rekenen, meten en schatten
- informatieverwerking en statistiek
- meetkunde
- algebra

Daarnaast maken we onderscheid tussen de drie verschillende hoofdstromen in het voortgezet onderwijs, zoals die veelal vanaf de brugklas worden gehanteerd:
- havo/vwo
- vmbo-tgk
- vmbo-b/lwoo

Als wiskundedocent ziet u onmiddellijk dat er dan 12 combinaties mogelijk zijn. In dit artikel beperken we ons. Bij elk van de leerstofdomeinen kijken we naar één stroom. We geven dan steeds cruciale voorbeelden; we streven niet naar compleetheid.

Rekenen, meten en schatten; havo/vwo

Verhoudingen

Uit het voorbeeld in figuur 1 is goed op te maken dat in groep 8 op flink niveau gewerkt wordt met verhoudingen. Er staan daar zes problemen bij elkaar

4 Welke dag en hoeveel graden?

Vul in.
Gebruik de grafiek.

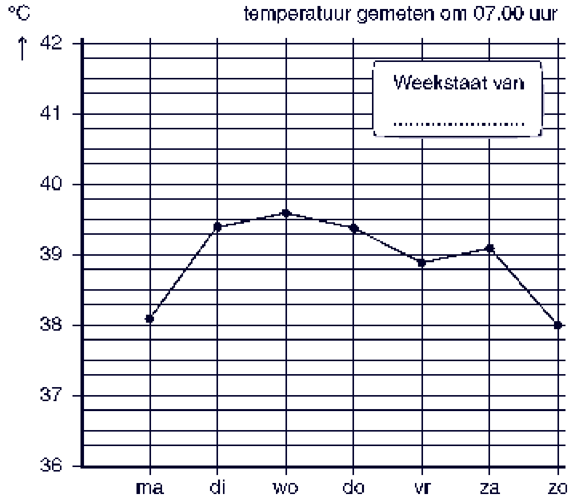
a Op ....dag had deze patiënt de meeste koorts: ....°C.

b Op ....dag en ....dag was de temperatuur even hoog.

c Tussen ....dag en ....dag steeg de temperatuur het meest.

d Tussen ....dag en ....dag daalde de temperatuur het meest.

e Op ....dag en ....dag steeg de temperatuur evenveel.



7 Elk jaar op zijn verjaardag wordt Peter gemeten. Hiernaast zijn al zijn lengten in een grafiek gezet. Door de punten is een vloeiende lijn getekend.

a Hoe lang was Peter toen hij 2 jaar oud was?

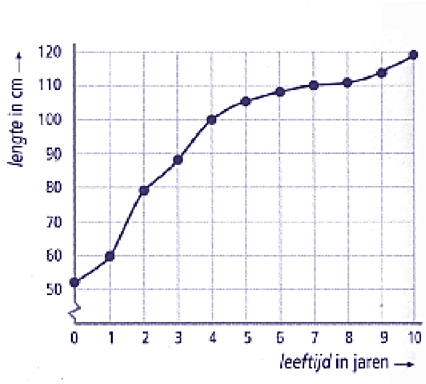
b Hoe oud was Peter toen hij 90 cm lang was?

c Hoe lang was Peter bij zijn geboorte?

d Op vierjarige leeftijd was Peter 100 cm lang. Hoeveel langer was hij twee jaar later?

e Hoeveel cm groeide Peter tussen 0 en 4 jaar?

f In welke periode groeide Peter sneller; tussen 0 en 4 jaar of tussen 4 en 8 jaar?



FIGUUR 2a Pluspunt, groep 7, OB, p. 44
FIGUUR 2b Moderne wiskunde, vmbo-T, 1A, p. 146.

en de aanpak is in vergelijking met het voorbeeld uit de brugklas veel opener. De handleiding van *De wereld in getallen* stelt voor om de kinderen zonder nadere instructie opgave a en b te laten maken. Het sterretje markeert een differentiatieopdracht, voor kinderen die snel klaar zijn. Dan volgt een nagesprek waarin de verschillende oplossingswijzen naast elkaar op het bord gezet worden. De handleiding geeft de verhoudingstabel aan als voor de hand liggende werkwijze.

Informatieverwerking en statistiek; vmbo-tgk

Grafieken

Zie figuur 2. Verrassend dat deze basisschoolleerlingen al grafieken kunnen aflezen en interpreteren op het niveau van deze voorbeelden. Het vergelijken van punten en de vraag naar het sneller of langzamer stijgen/dalen is in het voorbeeld van groep 7 van hoger niveau dan in het voorbeeld van de brugklas.
De opgave uit *Pluspunt* is bedoeld voor zelfstandig werken. De handleiding suggereert om kinderen er vooraf op te wijzen dat de grafieken het verloop van de temperatuur weergeven. Tevens wordt aanbevolen om in de nabespreking van deze opgave aandacht te besteden aan de interpretatie van de grafieken.

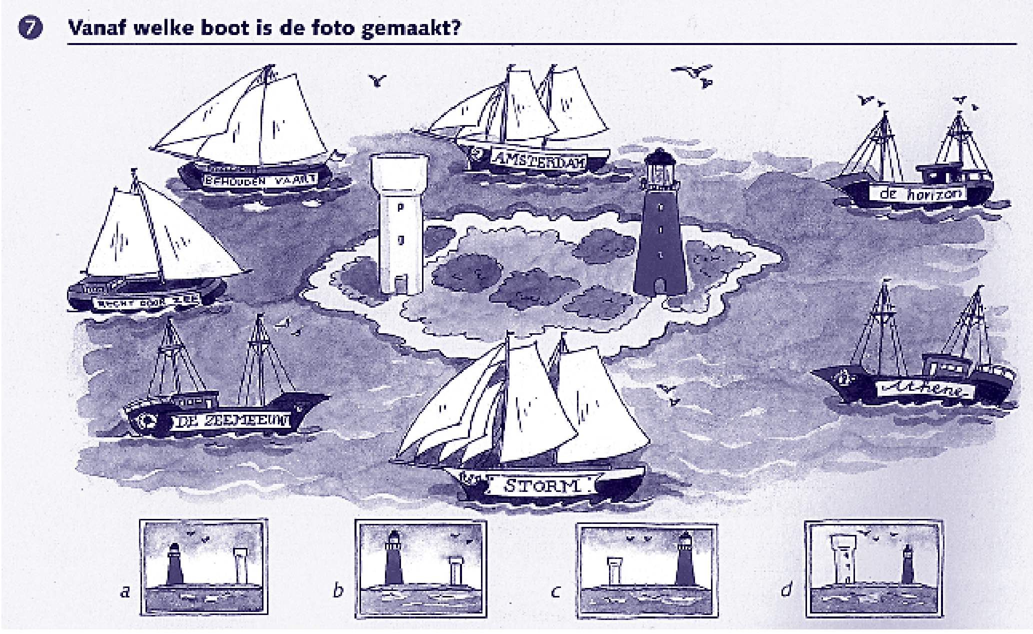
Meetkunde; vmbo-b/lwoo

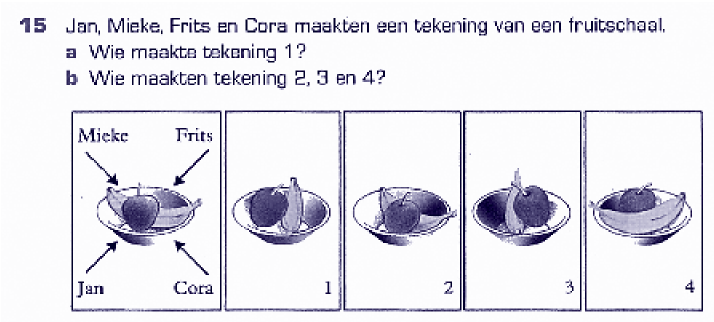
Aanzichten

Opvallend bij de voorbeelden in figuur 3 is het verschil in complexiteit. De opgave uit begin groep 6 is complexer dan de opgave voor het einde van de brugklas.
De gesplitste opstapvragen a, b, c enz. blijken kenmerkend voor de wiskundemethoden. Het concreet niveau van rekenen in het basisonderwijs brengt met zich mee dat leerlingen eenvoudigweg direct voor het probleem worden gesteld. Overigens maakt de opgave uit *Rekenrijk* deel uit van de verrijking. Hij is dus bedoeld voor de betere rekenaar uit groep 6; die krijgt de opgave zonder enige introductie of hulp voorgelegd.

Algebra; algemeen

In het basisonderwijs wordt nog geen formele algebra aangeboden. Wel is er een duidelijke voorbereiding. Werken met machientjes en/of pijlen gebeurt al vanaf het begin van de basisschool: u herkent hier de oriëntatie op het functiebegrip. Vleksommen bieden een voorbereiding op het oplossen van vergelijkingen (zie figuur 4). Uiteraard zijn de vele voorbeelden uit de eerste leerjaren van de onderbouw u op dit gebied bekend. We noemen u slechts de overbekende machientjesschema's uit *Getal en Ruimte*, de





FIGUUR 3a Rekenrijk, groep 6, 6A, p. 94
FIGUUR 3b Netwerk vmbo basis kader, 1B, p. 112

bordjesmethode uit *Moderne wiskunde* en de fobots uit *Netwerk*.

Aan het einde van de basisschool kunnen de kinderen ook werken met plaatsbepaling. Denk daarbij aan de vakkenaanduidingen van plattegronden (bijvoorbeeld B3), maar ook coördinaten zijn vaak al bekend (zie figuur 5). Ook hier is een voorbeeld uit de basisvorming overbodig. U kent de vele opgaven die bij de wiskundemethoden het coördinatenstelsel introduceren.

Rekenen; algemeen

Veel van het voorgaande heeft als strekking: in het basisonderwijs wordt meer gedaan dan rekenen. Dat heeft ook een keerzijde. Zo zijn er rekenonderwerpen die u wellicht ten onrechte bekend veronderstelt. Dat geldt allereerst voor de bekende *staartdeling*. Kinderen leren delen via herhaald aftrekken. Dat wordt steeds meer geschematiseerd, maar niet zover dat de ouderwetse notatie wordt bereikt (zie figuur 6).

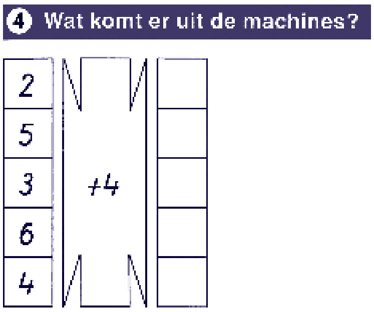
Een ander bekend onderwerp is het rekenen met *breuken* (zie figuur 7). Dat wordt in concrete situaties aangeboden, zodat vanuit de context direct een denkmodel wordt aangereikt. Ook daarbij wordt gewerkt met herhaald optellen of aftrekken. De formele regels voor vermenigvuldigen en delen van breuken worden niet aangeboden in het basisonderwijs.

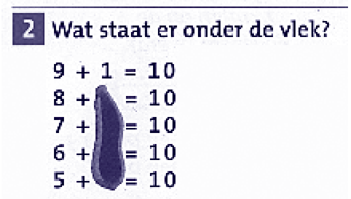
Inhoudelijke verschillen: globaal

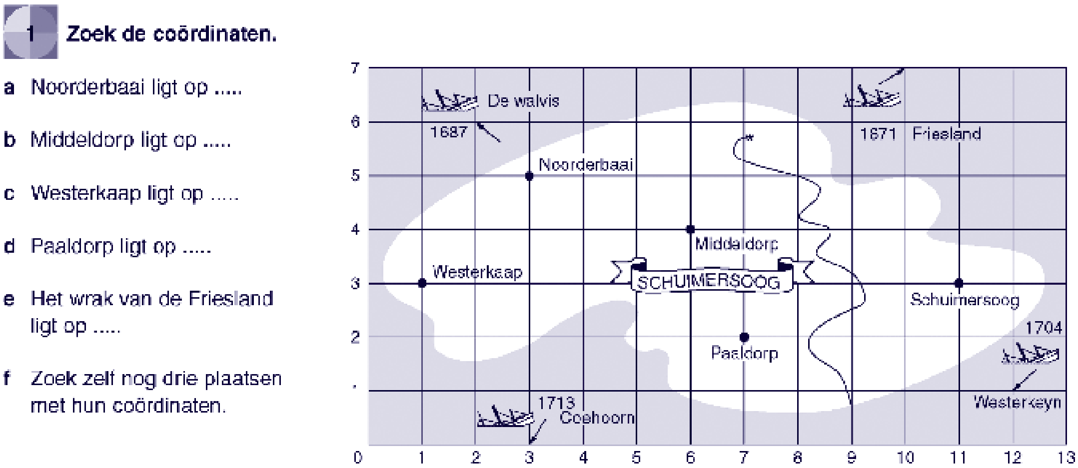
Het doornemen van basisschoolmethoden en het vergelijken van kerndoelen levert slechts een globaal beeld van de individuele verschillen tussen uw leerlingen in de brugklas.
De gangbare wiskundemethodes spelen met verschillende delen alleen in op het globale onderscheid *tussen* de verschillende hoofdstromen. Zo gaat bijvoorbeeld het wiskundedeel voor havo/vwo uit van een veilig instapniveau om van daar voor alle havo/vwo-leerlingen verder te gaan. In uw dagelijkse praktijk wordt u echter geconfronteerd met de verschillen in voorkennis *binnen* de klas. U merkt dat bij bepaalde onderwerpen de ene havo/vwo-leerling al duidelijk boven dit startniveau zit en snel afhaakt vanwege de ‘makkelijke’ sommen, terwijl de andere havo/vwo-leerling juist moeite heeft mee te komen.

Individuele verschillen

Als wiskundedocent wilt u graag recht doen aan de individuele verschillen tussen uw leerlingen. Daarvoor zult u eerst zicht moeten krijgen op







FIGUUR 4a De wereld in getallen, groep 4, p. 41
FIGUUR 4b Alles Telt, groep 4, p. 9

FIGUUR 5 Pluspunt, groep 7, OB, p. 89

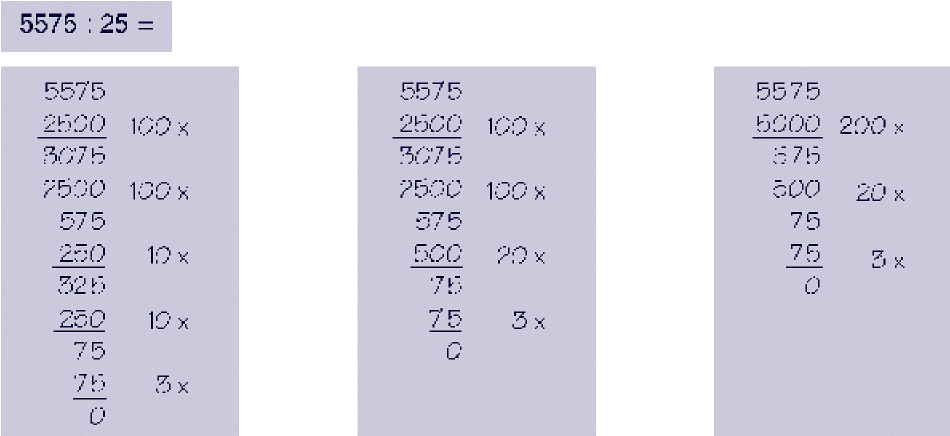
wat die verschillen daadwerkelijk zijn. Wat weet en kan iedere individuele leerling nu eigenlijk op het gebied van rekenen, meetkunde, informatieverwerking en (aanvankelijke) algebra bij binnenkomst? En hoe kunt u vervolgens inspelen op individuele verschillen in voorkennis in uw wiskundeonderwijs? Uit het voorgaande mag blijken dat deze vragen verre van eenvoudig te beantwoorden zijn.
Een arbeidsintensieve inspanning zoals praten met de leerkracht van groep 8 levert een individueel beeld, maar nog geen handvatten om daarop in te spelen. Voor een goede analyse is dringend een instrument nodig waarmee een docent de voorkennis van individuele leerlingen kan inventariseren, diagnosticeren en zonodig kan remediëren. Bovendien moet er een koppeling zijn met de wiskundemethode. Startend vanaf het globaal uitgangsniveau vanuit het basisonderwijs moet er de mogelijkheid zijn om leerlingen met meer voorkennis in de brugklas zaken te laten overslaan en hen verdiepingsstof aan te bieden, waar anderen met remediërend materiaal hiaten vullen.
Ontwikkelingen op dit gebied zijn in volle gang. Experimenten met nieuw (ict-)materiaal op proefscholen leveren de eerste praktijk-ervaringen[1].

Conclusies

De gebruikte voorbeelden geven een globale duiding van de aansluitingsproblematiek. Leerlingen in de leeftijd van 6 tot 12 jaar zitten met rekenen/wiskunde in de concreet operationele fase. Weliswaar leren en denken zij steeds meer in woorden in plaats van beelden en zijn ze in staat om zaken met elkaar te combineren, maar alles is nog steeds concreet voorstelbaar. De stap naar de formeel operationele fase, waarin ook het denken op hypothetisch en abstract niveau mogelijk wordt, volgt in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs (12 tot 15 jaar).
De overgang van rekenen in het basisonderwijs naar wiskunde in het voortgezet onderwijs is hieronder voor de verschillende hoofdstromen globaal beschreven. Voor elke stroom noemen we de onderwerpen die zeker nog aandacht nodig hebben. Bij elke stroom zijn er ook onderwerpen vermeld die in het basisonderwijs al zoveel aandacht hebben gehad, dat u daar uw voordeel mee kunt doen in het voortgezet onderwijs.

Conclusies havo/vwo

Havo/vwo-leerlingen beheersen globaal genomen het eindniveau van de rekenmethodes voor groep 8. De potentiële havo/vwo-leerling wordt bij wiskunde geconfronteerd met te lange aanlopen op concreet





FIGUUR 6 Pluspunt groep 7, LB, p. 15
FIGUUR 7 Pluspunt groep 8, OB, p. 30

niveau. Hij of zij is toe aan de volgende stap van de formele fase en zit te wachten op expliciteren en formaliseren. U kunt het aantal oriënterende opgaven bij alle onderwerpen beperkt houden.

Conclusies vmbo-tgk

De vmbo-tgk-leerlingen beheersen de rekenstof van de basisschool grofweg op het niveau van groep 7. Deze leerling is met name op het gebied van rekenen nog niet toe aan de formele fase. Reken- en algebrahoofdstukken in de brugklas vormen daarmee een probleem. Onderwerpen als grafieken aflezen en interpreteren en meetkunde (aanzichten/oriëntatie) zijn echter bekend en hebben in de betreffende brugklashoofdstukken een (te) laag instapniveau.

Conclusies vmbo-b/lwoo

Het eindniveau van leerlingen in vmbo-b/lwoo ligt globaal op dat van groep 6. Zij zitten nog volop in de concreet operationele fase. Rekenen dient ook in de brugklas nog op concreet niveau plaats te vinden en de stap naar formaliseren mag wellicht niet eens verwacht worden. De rekenmachine biedt daarbij uitkomst. Wél kunnen ook deze leerlingen aanzichten en grafieken interpreteren en daarmee valt te winnen op de betreffende hoofdstukken in de brugklas.

Noot

[1] Indien u geïnteresseerd bent in de ontwikkelingen rondom dit nieuwe materiaal, kunt u contact opnemen met Peter Hoogendijk.

Vermelde methodes

De aangehaalde reken/wiskundemethodes voor het basisonderwijs betreffen alle de nieuwste edities die in 2000/2001 zijn verschenen in verband met de komst van de euro:
- *'Pluspunt', uitgeverij Malmberg*
- *'De Wereld in Getallen', uitgeverij Malmberg*
- *'Rekenrijk', uitgeverij Wolters-Noordhoff*
- *'Alles telt', uitgeverij ThiemeMeulenhoff*

De aangehaalde wiskundemethodes voor het voortgezet onderwijs zijn de nieuwste edities van:
- *'Getal en Ruimte', uitgeverij EPN, editie 2003*
- *'Moderne wiskunde (8e editie)', uitgeverij Wolters-Noordhoff, 2003*
- *'Netwerk (3e editie)', uitgeverij Wolters-Noordhoff, 2003*

Over de auteurs

Peter Hoogendijk en Else Simons zijn uitgevers wiskunde (vo) en rekenen (bao) bij uitgeverij Malmberg. Beiden waren in het verleden als wiskundedocent werkzaam in het onderwijs en hebben meegewerkt aan diverse wiskundemethodes. Hun e-mailadressen zijn peter.hoogendijk@malmberg.nl en else.simons@malmberg.nl.

'UIT ZUCHT OM IN DE WISKUNST BEDREVEN TE WORDEN'

Veranderingen in het onderwijs van de rekenschool van het genootschap Mathesis Scientiarum Genitrix, 1785-1850

[Danny Beckers]



Inleiding

In 1785 werd te Leiden een wiskundig genootschap opgericht. Lid werd men 'uit zucht om in de Wiskunst bedreven te worden'. Het Leidse *Genootschap der Beschouwende en Werkdadige wiskunst, onder de spreuk: Mathesis Scientiarum Genitrix* (wiskunde is de moeder aller wetenschappen) werd opgericht omdat ze nieuw reken- en wiskundeonderwijs wilde geven. Rond 1790 gaf ze een rekenboek uit waarin dat nieuwe rekenonderwijs concreet vorm kreeg.
In de jaren 1827-1831 publiceerde het genootschap opnieuw een rekenmethode. Is het eerste rekenboek een uiting van nieuwe opvattingen over de rol van wiskunde in de samenleving, het tweede toont dat het genootschap zich bewust was van de nieuwe rol die het onderwijs speelde in de samenleving.
Het Leidse genootschap kan zodoende dienen om de veranderingen in het rekenonderwijs in Nederland rond 1800 te illustreren.

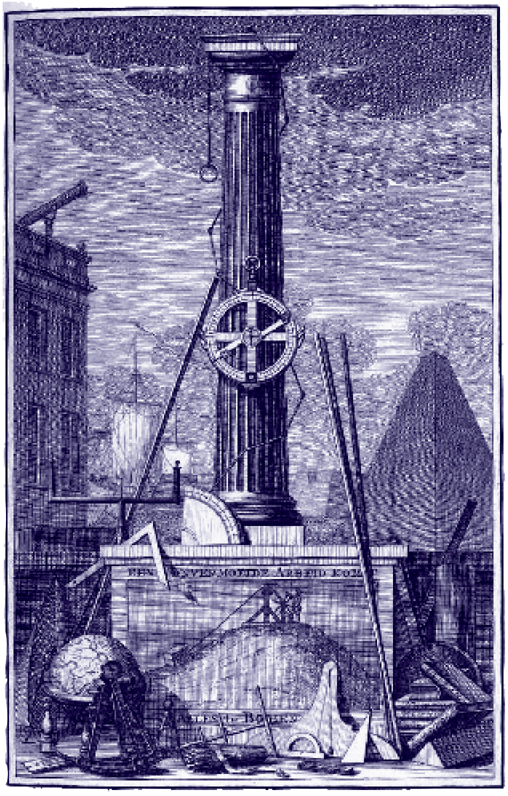
Achtergronden

Eind 18e eeuw verkeerde Nederland in crisis. De eens zo trotse Republiek der Nederlanden speelde geen rol meer op het Europese politieke toneel. Economisch zat de Republiek aan de grond. De eens zo trotse VOC balanceerde op de rand van het faillissement. Was de Republiek in de 17e eeuw in alle opzichten toonaangevend geweest, die tijd was lang voorbij. De Nederlanders zagen verlangend terug op de tijden van schilders als Rembrandt en geleerden als Huygens.
In een poging het tij te keren werden er gedurende de tweede helft van de 18e eeuw talloze genootschappen opgericht. Die genootschappen stelden zich ten doel om door middel van geregelde bijeenkomsten de leden – en daarmee de Republiek – te vormen. In literaire genootschappen poogde men in gedichten en literatuur de oude Nederlandse kwaliteiten te evenaren. Door middel van lezingen, lessen en publicaties trachtte men meer aandacht te genereren voor de Nederlandse letteren. Wiskundige genootschappen functioneerden op een vergelijkbare wijze. De achterliggende gedachte was, dat wanneer kunst en wetenschap eenmaal weer (internationaal) toonaangevend waren, politieke en economische glorie vanzelf zouden volgen (zie [5]).
Tussen 1775 en 1820 verschenen op diverse plaatsen in Nederland initiatieven die op bovengeschetste wijze verbreiding of vermeerdering van wiskundige kennis nastreefden. Vaak werden ze op initiatief van een wiskundeonderwijzer opgericht en aan een lokaal genootschap gelieerd, maar soms ook richtte zo'n onderwijzer – of een groepje gelijkgestemden – zelf een gezelschap op (zie [1]). Met hun werkzaamheden poogden ze Nederland uit het economische slop te trekken.

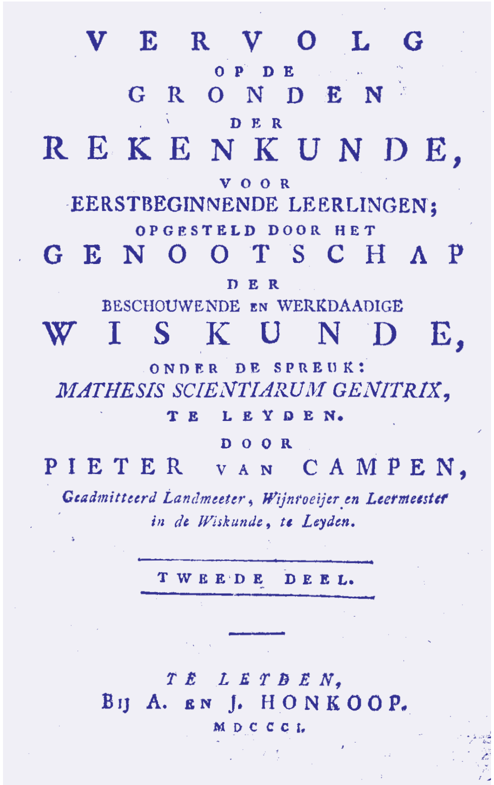
Wiskunde en samenleving

Wiskunde was in de 18e-eeuwse samenleving een vak dat een (belangrijke) rol vervulde in de technische vakken en het koopmansbestaan. Wiskunde omvatte landmeten en cartografie, ontwerpen (en bouwen) van fortificaties, navigatie en het rekenwerk dat daarbij kwam kijken. Er bestond ook theoretische wiskunde, maar die vond vooral waardering in academische kringen. Deze visie op wiskunde is herkenbaar in de allegorie van de wiskunde die het Amsterdams wiskundig genootschap 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' produceerde. Op deze prent was de wiskunde in het bijzonder vertegenwoordigd met schepen (navigatie), zuilen, gebouwen (architectuur) en landmeetinstrumenten. Het nut van wiskunde voor de samenleving was heel direct en men stelde niet speciaal prijs op theoretische wiskunde. Deze visie had effect op de rol van wiskunde in het onderwijs.
Het doel van het 18e-eeuwse onderwijs was tweeledig. Enerzijds diende de leerling te leren hoe hij zich moest gedragen. Anderzijds diende hij een aantal praktische vaardigheden op te doen die hem in zijn verdere leven van pas kwamen. Welke vaardigheden dat waren was afhankelijk van zijn stand. Behoorde hij tot de rijke elite dan moest hij Latijn en Grieks leren om universitair onderwijs te kunnen genieten. Was hij daarentegen voorbestemd om koopman of landmeter te worden, dan hoorde hij Frans te leren spreken, en een aantal rekenrecepten te kennen die hij in zijn toekomstige beroep zou tegenkomen.
Deze opvatting over wiskundeonderwijs is herkenbaar in het beroemde rekenboek van Willem Bartjens. In dat boek treft de lezer losse rekenrecepten, die een standaard oplossing bieden voor standaard problemen. Er is geen verband tussen de verschillende recepten en het is Bartjens er niet om te doen uit te leggen waarom de recepten werken. Een belangrijke regel bij Bartjens is bijvoorbeeld de *regel van drieën*. Daarin vertelt hij dat het om drie getallen gaat en je een vierde uitrekent. Eerst zet Bartjens de drie getallen in volgorde. Helemaal rechts het getal waarover je iets weten wilt, helemaal links het getal dat in dezelfde grootheid is uitgedrukt en het derde getal in het midden. Vervolgens geeft hij een voorbeeldopgave: 4 ellen linnen kosten 9 gulden, hoeveel kosten 16 ellen? De volgorde (volgens het recept) is 4 — 9 — 16. Dan luidt de regel: vermenigvuldig de laatste twee getallen en deel door het eerste, dus het antwoord is $(9 \cdot 16):4 = 36$ gulden. Verschillende beroepsgroepen kregen in het boek van Bartjens hun rekenrecepten gepresenteerd in afzonderlijke paragrafen zo dat een individueel programma mogelijk was: de zilversmid en de koopman konden afzonderlijke paragrafen bestuderen (zie [4]). Daarmee was het boek van Bartjens een goede representant van het Nederlandse onderwijsbestel dat lokaal georganiseerd was en waar het curriculum op de lokale behoeften – en individueel op de noden van de leerling – werd afgestemd.

De opvattingen over het nut van wiskunde voor de samenleving waren gedurende de 18e eeuw aan verandering onderhevig. Aan de 18e-eeuwse Franse ingenieursscholen kreeg wiskunde een meer verheven



FIGUUR 1 Titelprent van de eerste publicatie van het Wiskundig Genootschap: Kunstoefeningen over verscheide nuttige onderwerpen der wiskunde (1782)



VERVOLG
OP DE
GRONDEN
DER
REKENKUNDE,
VOOR
EERSTBEGINNENDE LEERLINGEN;
OPGESTELD DOOR HET
GENOOTSCHAP
DER
BESCHOUWENDE EN WERKDAADIGE
WISKUNDE,
ONDER DE SPREUK:
MATHESIS SCIENTIARUM GENITRIX,
TE LEYDEN.
DOOR
PIETER VAN CAMPEN,
Geadmitteerd Landmeeter, Wijnroeijer en Leermeester in de Wiskunde, te Leyden.

TWEEDE DEEL.

TE LEYDEN,
BIJ A. EN J. HONKOOP.
MDCCCI.

FIGUUR 2

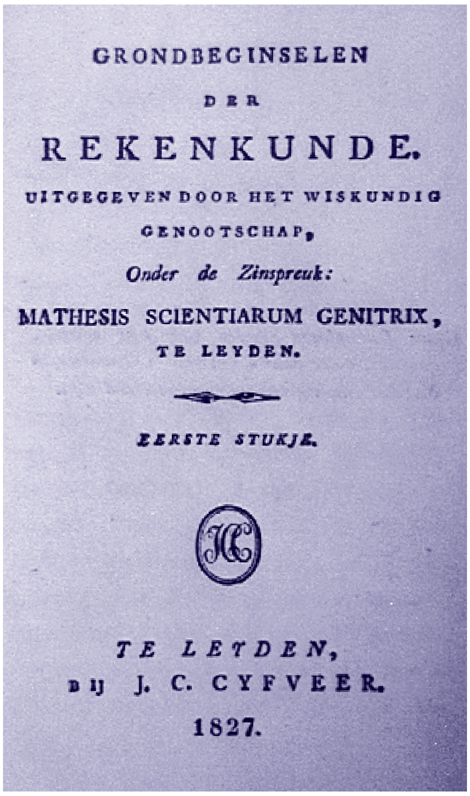
rol toebedacht. Wiskunde zou een mens namelijk ook helderder leren denken. De voordelen voor een ingenieur lagen voor de hand. Wanneer de ingenieur niet alleen in staat was om standaard rekenrecepten op te volgen, maar tevens over het inzicht beschikte om innovaties te beoordelen op bruikbaarheid, of zelfstandig innovaties te bedenken en ontwerpen, dan zou dat de slagkracht van de staat vergroten. Theoretische (beschouwende) wiskunde was volgens velen de manier om dat inzicht te verkrijgen (zie [2]).

Mathesis

Mathesis was één van de wiskundige genootschappen die rond 1800 werden opgericht. De leden waren overtuigd van de heilzame invloed die van meer wiskundekennis zou uitgaan. Bloei van de economie liet zich gemakkelijk rijmen met meer aandacht voor de 'werkdadige' (praktische) wiskunde die Mathesis hoog in het vaandel had. Een aantal van de genootschapsleden kende de nieuwe Franse ingenieursboeken en waardeerde de nieuwe visie op het nut van wiskunde die daaruit sprak. Tijdens de bijeenkomsten van de genootschapsleden werd regelmatig de loftrompet gestoken over het nut van wiskunde voor de samenleving.
Vanaf het begin gaf het genootschap ook wiskundelessen. Er waren een aantal cursussen (scholen) die de leerling kon volgen: de bouwkundeschool, de (theoretische) wiskundeschool, de tekenschool etc. Alle leerlingen dienden eerst de rekenschool te doorlopen. De praktijk werd in de rekenschool van een theoretisch fundament voorzien. De rekenlessen vonden – zoals alle lessen – plaats in de avonduren en werden bezocht door de kinderen van de leden. Ook studenten van de Leidse universiteit waren bij het genootschap betrokken. Zij verzorgden een deel van de lessen. Al snel nadat met de school was begonnen, werd een aantal van de beste leerlingen uit het naburige weeshuis tot de lessen toegelaten. Voor hen was er technisch beroepsonderwijs. Voor hun praktische vorming werden ze bij een man van de praktijk in de leer gedaan (zie [6]). Met deze opleiding voor weeskinderen werkte het Leidse genootschap heel concreet mee aan economisch herstel.

De rekenschool eind 18e eeuw

Het doel dat Mathesis had met haar rekenschool week af van het gangbare onderwijs. Anders had men kunnen volstaan met de financiering van de schoolloopbaan van een aantal weeskinderen. De rekenkunde diende een praktisch doel, namelijk toegang bieden tot een positie in de handel. Daarnaast was het de bedoeling dat de leerlingen inzicht zouden verwerven in de structuur van ons talstelsel. Met dat inzicht zouden ze beter leren denken en formuleren. De genootschapsleden waren overtuigd dat meer begrip voor de theoretische rekenkunde tevens betere rekenaars zou opleveren. In 1788 publiceerde Pieter van Campen de *Gronden der Rekenkunde*. Dit rekenboek was speciaal bestemd voor de rekenschool van Mathesis en werd daar tot 1827 gebruikt. Bij mijn weten bestaat er van dit boek geen exemplaar meer, maar het zal hetzelfde stramien hebben gevolgd als het *Vervolg op de Gronden der Rekenkunde* dat Van Campen in 1801 publiceerde.



GRONDBEGINSELEN
DER
REKENKUNDE.
UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG
GENOOTSCHAP,
Onder de Zinspreuk:
MATHESIS SCIENTIARUM GENITRIX,
TE LEYDEN.

EERSTE STUKJE.

TE LEYDEN,
BIJ J. C. CYFVEER.
1827.

FIGUUR 3



FIGUUR 4 Pieter van Campen (1750-1820), oprichter van het Genootschap MSG; auteur van het eerste MSG-rekenboek (1788)

Het verlangen van de genootschapsleden om de glorie van de 17e-eeuwse Republiek te doen herleven was herkenbaar in dit vervolg. Abraham de Graaf, een bekende 17e-eeuwse auteur van lesboeken, figureerde bijvoorbeeld in het rekenboek als de koper van een partij linnen. Tegelijkertijd nam de auteur duidelijk afstand van het 17e-eeuwse rekenonderwijs. In de inleiding stelt Van Campen dat de boeken van Bartjens, De Graaf en hun tijdgenoten het probleem hebben dat ze onvoldoende laten zien waarom de rekenregels werken. Daardoor verkregen de leerlingen geen inzicht in hun rekenwerk.
Hoe kreeg deze kritiek vorm in het rekenonderwijs? Van Campen begint het *Vervolg op de Gronden der Rekenkunde* met de 'regel van vijven'. Dit was een regel die (ook bij Bartjens) bijvoorbeeld diende om opgaven op te lossen van het type: ik betaal 5 gulden rente per jaar over een lening van 100 gulden, hoeveel rente betaal ik over een lening van 950 gulden voor acht maanden? Het renteverloop werd lineair verondersteld (dus geen rente op rente). Van Campen legt uit dat de verhoudingen die ten grondslag lagen aan de regel van drieën, tevens hier dienst doen.
Hij lost het voorstel op met een tussenoplossing: eerst rekent hij uit hoeveel gulden rente hij moest betalen wanneer hij het bedrag van 100 gulden niet één jaar (12 maanden) maar acht maanden leende ($12 : 5 = 8 : ?$). Vervolgens rekent hij met dat nieuwe rentebedrag uit hoeveel 950 gulden zou kosten in plaats van 100 gulden. Dan vat hij zijn rekenwerk samen. Hij introduceert x voor het antwoord van de tussenvraag en y voor het eindantwoord en stelt de beide verhoudingen op, te weten $12 : 5 = 8 : x$ en $100 : x = 950 : y$. Tot slot laat hij zien dat er één nieuwe verhouding uit af te leiden valt door de twee te vermenigvuldigen. De beide x-en vallen dan tegen elkaar weg en je krijgt $1200 : 5 = 7600 : y$. De juistheid van het vermenigvuldigen van de verhoudingen en het wegvallen van de x-en had hij tussendoor geïllustreerd aan de hand van een uitgewerkt voorbeeld.
De opgavenseries die volgden, zouden ook bij de oudere lesboeken niet hebben misstaan. Alle rekenregels en opgaven hadden betrekking op de handel. Rekenvaardigheid bleef ook een belangrijk doel van het rekenonderwijs. Het nut van rekenen en wiskunde zat voor Van Campen echter tevens in het nadenken over de theorie. De uitleg van de theorie is in de *Gronden der Rekenkunde* zodoende veel uitvoeriger en de regels stonden niet meer los van elkaar. Van Campen gaf daarmee te kennen belang te hechten aan een theoretische basis voor het (reken)werk in de praktijk. Het idee was dat de leerling leerde denken door middel van theoretische wiskunde. Daarmee verschoof het nut van wiskunde van de praktijk naar de theorie en kreeg de theoretische (zuivere) wiskunde een kans om aan belang te winnen.

Veranderingen

Was de visie op het nut van wiskunde voor de samenleving die Mathesis uitdroeg in 1788 nog omstreden (in 1792 werd een vergelijkbaar rekenboek door een recensent afgekraakt omdat het teveel nadruk legde op nadenken en te weinig op praktische rekenvaardigheid), gedurende de eerste decennia van de 19e eeuw werd de vormende waarde van



FIGUUR 5

theoretisch rekenonderwijs gemeengoed. In de onderwijswetten van Willem I kreeg dit vanaf 1815 steeds concreter vorm.
Rond 1820 verdwenen dan ook de meeste wiskundige instituten die Nederland rijk was. Het nieuwe onderwijsbestel van het koninkrijk der Nederlanden garandeerde dat de nieuwe ideeën over het nut van wiskunde hun beslag zouden krijgen (zie [2]).
De rekenschool van Mathesis bleef bestaan. Het genootschap vervulde met het technisch onderwijs aan weeskinderen een belangrijke rol in de Leidse gemeenschap. Het genootschap concentreerde zich op de school. Voor de bijeenkomsten waarin voordrachten werden gegeven, bestond geen belangstelling meer (zie [6]).

Het 19e-eeuwse onderwijs stond in het teken van de opvoeding van de burger in de moderne, centraal geregeerde natiestaat. Dat betekende dat het onderwijs veel meer centraal werd aangestuurd. Het Ministerie van Binnenlandse Zaken kreeg tevens Onderwijs in portefeuille. Het feit dat er centraal over het onderwijs beslist ging worden, geeft tevens aan dat er anders gedacht werd over de rol van het onderwijs in de samenleving. Er werd van het onderwijs verwacht dat leerlingen werden opgevoed in het burgerschap. Dat betekende dat zij niet alleen een toekomstig beroep moesten leren, zij werden ook geacht te leren zien dat ze in een rechtvaardige samenleving leefden, zich bij hun rol daarin neerlegden en er naar vermogen aan bijdroegen. Onderwijs werd dus van belang geacht voor een goed functionerende staat – niet langer slechts voor het individu of de lokale gemeenschap. Door alle leerlingen aan hetzelfde curriculum te onderwerpen was het voordeel voor de staat bovendien dat de best presterende leerlingen (idealiter) ook op de juiste plaatsen terecht kwamen.
Een nieuw vak als vaderlandse geschiedenis was bijvoorbeeld een manifestatie van dit nieuwe burgerschapsideaal. De leerling leerde daarin bijvoorbeeld de weldaad die de Oranjefamilie had betekend voor het vaderland. Daarmee legitimeerde Willem I (sinds 1813 op de troon) zijn koningschap.
Ook rekenen en wiskunde pasten in het nieuwe onderwijsbestel. Nog steeds verkeerde het land in economische crisis en het door de wiskundige genootschappen uitgedragen idee dat grondige kennis van wiskunde, technische innovaties zou helpen stimuleren sprak aan. Met het argument van een ‘vormende waarde’ (leren denken) werden rekenen en wiskunde in het curriculum van de school geïntroduceerd. Verstandige burgers kon de staat goed gebruiken.

Een nieuwe methode

In 1825 werd er binnen het bestuur van Mathesis voorgesteld een nieuwe methode voor het reken-onderwijs te schrijven. Directe aanleiding was de invoering van het metrieke stelsel die het oude rekenboek van het genootschap onbruikbaar maakte. De onderwijzer en ijkmeester M.I.S. Bevel en zijn vriend, de meestermetselaar P.E. Rijk, verzorgden de publicatie van drie delen *Grondbeginselen der Rekenkunde* (1827–1831). Het nieuwe rekenboek, dat enkele decennia aan de school van Mathesis werd

gebruikt, kreeg een lovende recensie in een van de onderwijzerstijdschriften.
In de *Grondbeginselen der Rekenkunde* is de nieuwe rol van het onderwijs voor de samenleving duidelijk herkenbaar. In het lesboek worden sommen opgegeven die het nieuwe burgerschapsideaal helpen uitdragen. Zo waren er opgaven die bijbelkennis veronderstelden: 'Hoeveel volks heeft er aan den Tempel van Salomo gearbeid, als men telde 70000 lastdragers, 80000 steenhouwers en houthakkers en 3300 opzieners?' Zo waren er ook sommen waarvan de inkleding informatie verschafte over de vaderlandse geschiedenis, de oprichtingsdatum van het genootschap, over proeven met betrekking tot de snelheid van het geluid, over aardrijkskunde of sterrenkunde. De opgaven bevatten tal van praktijksituaties en waren niet beperkt tot één beroepsgroep. Daarmee lieten de auteurs zien dat de theoretische wiskunde universeel toepasbaar was en ze lieten er tevens mee zien dat ze begrepen hadden dat de Nederlandse staat één curriculum voor iedereen voorstond. Niet langer was het onderwijs individueel toegesneden op de leerling, de zoon van de zilversmid en de zoon van de koopman kregen allemaal hetzelfde rekenonderwijs.
Uiteraard bleven de auteurs uitvoerig stilstaan bij het metrieke stelsel. De introductie van het metrieke stelsel in 1820 was een manier bij uitstek om het land tot eenheid te smeden. Willem I was zich daarvan bewust en profiteerde van het rekenonderwijs dat inmiddels overal in het land werd gegeven. De auteurs van de *Grondbeginselen der Rekenkunde* deden hun uiterste best het nieuwe stelsel begrijpelijk en inzichtelijk te maken voor de leerlingen.
Het rekenboek besteedt voorts aandacht aan het leren denken van de leerling. Ondertussen waren ook de ideeën over de samenhang tussen de diverse rekenkundige operaties verder geëvolueerd. Regelmatig wordt terug verwezen naar eerder geboekte resultaten of eerder gemaakte afspraken. Exemplarische bewijzen gaan vooraf aan meer algemene redeneringen omtrent de juistheid van aangeboden theorie. De regel van drieën werd niet meer in een afzonderlijke paragraaf behandeld, maar is een toepassing geworden die de leerling kon maken zodra hij kon vermenigvuldigen en delen (zie [3]).

Tot slot

Het dient benadrukt te worden dat de rekenschool van Mathesis niet hét Nederlandse rekenonderwijs was. De leerlingen van Mathesis behoorden tot de uitverkorenen. Het rekenonderwijs aan de rekenschool mag typerend heten voor de scholen van de burgerij. De kinderen van de elite kregen een minder praktijkgericht rekenonderwijs, waarbij de nadruk vooral kwam te liggen op de bewijsstructuur (zie [7]). De scholen voor lager onderwijs (d.i.: onderwijs voor de lagere sociale klassen) boden beduidend minder nadruk op bewijzen en leren denken. Dat neemt niet weg dat de hierboven verhaalde geschiedenis van het rekenonderwijs bij Mathesis illustreert hoe maatschappelijke veranderingen effect kunnen hebben op de wijze waarop ons rekenonderwijs vorm krijgt.

Er is momenteel veel te doen rond de inhoud van het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs. Voor- en tegenstanders van verschillende curriculumwijzigingen (wel of geen differentiaal-rekenen, wanneer mag de GR gebruikt, wat te doen met de klassieke meetkunde) en meer algemene onderwijskundige ontwikkelingen (het verdwijnen van contacturen, probleemgestuurd leren, elektronische leeromgevingen) buitelen over elkaar heen in een poging om hun standpunten en verworvenheden zo goed mogelijk te verdedigen. Het is goed om ons te realiseren dat de inhoud van ons reken- en wiskundeonderwijs altijd aan veranderingen onderhevig is geweest. Met het verhaal over het rekenonderwijs binnen Mathesis Scientiarum Genitrix heb ik willen illustreren dat de rol van het onderwijs binnen de samenleving en de rol van wiskunde binnen de samenleving een bepalende rol spelen in de vorm die reken- en wiskundeonderwijs krijgen. Op beide gebieden is er sinds de rekenschool van Mathesis veel veranderd. De verwachtingen die binnen de samenleving ten aanzien van wiskunde en onderwijs leven, zijn zeker zo belangrijk als de eigen wensen van de wiskundeonderwijzers. Het is dus zaak om de verwachtingen ten aanzien van wiskundeonderwijs hoog gespannen te houden. Daar kan elke onderwijzer het zijne toe bijdragen!

Literatuur

[1] Danny Beckers: Mathematics our goal! Dutch mathematical societies around 1800. In: Nieuw Archief voor Wiskunde (IV) 17 (1999), pp. 465-474.
[2] Danny Beckers: Het despotisme der Mathesis. Hilversum: Verloren (2003).
[3] Danny Beckers, Harm Jan Smid (ed.): Grondbeginselen der Rekenkunde (1828). Hilversum: Verloren (2003) [facsimile met uitvoerige inleiding; deel 1 in de serie Rekenmeesters].
[4] Danny Beckers, Marjolein Kool (ed.): Willem Bartjens, De Cijfferinghe (1604). Hilversum: Verloren (2004) [facsimile met uitvoerige inleiding; deel 2 in de serie Rekenmeesters].
[5] W. Mijnhardt, J. Kloek: 1800: blauwdrukken voor een samenleving. Den Haag: SdU (2002).
[6] Loes Peeperkorn-van Donselaar: Twee eeuwen technisch onderwijs, twee eeuwen bij de tijd. De geschiedenis van MSG Leiden, 1785–1985. Leiden: MSG (1985).
[7] Harm Jan Smid: Een onbekookte nieuwigheid? Delft: DUP (1997).

Over de auteur

Danny Beckers (e-mailadres: d.beckers@inter.nl.net) is wetenschapshistoricus. Hij is als docent wiskunde verbonden aan het Dominicus College te Nijmegen; hij is tevens waarnemend directeur van het Instituut Wetenschap & Samenleving aan de Radboud Universiteit. Zijn interesse gaat onder andere uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.

‘VOLGENS BARTJENS ...’ EN DE NVORWO

Kwaliteitsverbetering van reken-wiskundeonderwijs staat hoog in het vaandel [Jaap Vedder]

Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs

De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) maakt zich ernstig zorgen over (het behoud van) de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs als deel van de zorgelijke ontwikkeling rond de bètavakken in de basisschool en in de lerarenopleiding basisonderwijs (pabo). De NVORWO pleit voor twee zaken: goed reken-wiskundeonderwijs in de basisschool en goed opleidingsonderwijs op pabo’s. Waar draait het om en hoe pakt de vereniging dat aan?

Een basis voor rekenen-wiskunde, bèta en techniek

Op basisscholen en in de eerste jaren van het vmbo wordt de basis gelegd voor de taal- en reken-vaardigheden van leerlingen en die basis dient inspirerend, motiverend en grondig te zijn. De basis-school kan daarbij aansluiten bij de natuurlijke nieuwsgierigheid van leerlingen en deze verder ontwikkelen. Kansen voor kinderen zullen toenemen als zij over een goede ondergrond in taal en rekenen/wiskunde beschikken. Rekenen/wiskunde op realistische wijze gegeven is essentieel om de belangstelling voor bèta en techniek te laten groeien. Een groot deel van de studenten op pabo’s heeft een zeer gebrekkige bèta-achtergrond. Daardoor hebben pabo’s veel moeite voldoende leraren af te leveren die goede kwalificaties hebben in de bètarichting: rekenen-wiskunde en techniek. Naast de initiële opleiding zal de nascholing van leraren basisonderwijs en vmbo een spilfunctie moeten hebben.

Investeren in kwaliteit van reken-wiskundeonderwijs

Een belangrijk onderwerp voor de NVORWO is de leven lange professionalisering van de basisschoolleraren op het gebied van reken-wiskundeonderwijs. Een opleiding tot leraar verschaft slechts een startbekwaamheid. Ook zeer korte trajecten voor allerlei zij-instromers vergroten de behoefte en noodzaak aan na- en bijscholing. De NVORWO streeft daarom naar goed opgeleide leraren én goede professionaliseringstrajecten. Deze leven lange professionalisering is nog matig ontwikkeld in Nederland.

NVORWO-Plan ‘Volgens Bartjens ...’

De NVORWO geeft invulling aan haar rol door het stimuleren van de professionalisering op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs om zodoende de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs te verhogen. Dit doet zij door het gezamenlijk met de Koninklijke Van Gorcum uitgeven van het tijdschrift ‘Volgens Bartjens...’. Dit tijdschrift is een blad voor en over de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en in de eerste jaren van het vmbo. Het is een reken-wiskunde-didactiekblad, dat moet aanzetten tot actie en leiden tot het verbeteren van de reken-wiskundeles in de praktijk.
De website *www.volgens-bartjens.nl* is in 2004 als digitale component aan het tijdschrift toegevoegd. Deze website zal een aanvulling op en een uitbreiding van het tijdschrift vormen. Daar vindt de (aanstaande) leraar informatie en ideeën en kunnen (aanstaande) leerkrachten, opleiders, begeleiders en onderzoekers een actief netwerk vormen.
Naast de website gekoppeld aan het tijdschrift is er ook een website van de vereniging (*www.nvorwo.nl*). Daar wordt het contact met de leden onderhouden. Het bestuur probeert deze website te laten functioneren als informatie- en communicatiekanaal en op deze manier de leden meer te betrekken bij het innemen van standpunten betreffende het reken-wiskundeonderwijs.

De NVORWO en de NVvW

Om de plaats en kwaliteit van bèta en techniek in de Nederlandse maatschappij te verbeteren is een goede samenwerking tussen NVORWO-leden en NVvW-leden noodzakelijk. De kwaliteit van het wiskundeonderwijs is immers mede afhankelijk van de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Terwijl de kwaliteit van het pabo-onderwijs weer mede afhankelijk is van het voortgezet onderwijs. Behoud en verhoging van de kwaliteit van wiskunde, bèta en techniek vraagt om samenwerking van beide verenigingen. Wij nodigen leden van de NVvW uit om onze website te bezoeken en deel te nemen aan de discussies over het basisonderwijs en de lerarenopleiding.

Over de auteur

Dr. Jaap Vedder is voorzitter van de NVORWO (www.nvorwo.nl). Zijn e-mailadres is: Voorzitter@NVORWO.nl.

NEGATIEF GEDRAG

[Victor Thomasse]

Ik ben best wel slim, vind ik zelf, dus als je mij een som geeft en voldoende tijd, dan los ik die wel op. Het beste gaat dat thuis in mijn werkkamer bij het zachte licht van de bureaulamp, met een kopje koffie en een Brandenburgs Concert of Mozart op de achtergrond. Ik blader even door het eerste hoofdstuk voor 3-havo en besluit dat ik daar in ieder geval geen enkele moeite mee zal hebben. Boek in mijn tas, licht uit: morgen weer een dag.

Eenmaal voor de klas ziet de wereld er heel anders uit. O, wat hebben die meisjes achterin een ontzettend negatieve uitstraling. Het viel me al op dat ze niet teruggroetten toen ik ze voor het schoolgebouw tegenkwam. Voorin beginnen Dirk en Johan direct met 't elkaar duwen te geven, Geert draait zich om naar zijn achterbuurvrouw en ik wacht al de derde keer tot het stil wordt. 'Nooit met je rug naar de klas!', dus ik schrijf schrijlings op het bord terwijl ik de boel in de gaten hou. 'Nou kom zeg, hoeveel is nou een getal dat ik van een negatief getal aftrek? Dat behandel ik al in de brugklas.' Verkeerde toon, ik begin zelf ook al negatief te worden. Zonder scrupules reken ik voor: $-200 - 103 = -297$
'Dat moet je kunnen!', voeg ik er ook nog aan toe. Ik ben slim en zij niet. Intussen hou ik Geert nauwlettend in de gaten en ga verder met de uitwerking op het bord.

'Ik snap er helemaal niets meer van!', klaagt Evelien, die vooraan zit en echt nooit wat uitvoert. 'Dat is niet waar', antwoord ik, 'je begrijpt al een heleboel; laten we kijken waar het probleem dan precies zit.' Ze kijkt verveeld alsof ze het niet wil begrijpen. 'Meneer De Kleine deed dat heel anders!' 'Ja!', echoot de klas.

Dan steekt Anneke haar vinger op. Gelukkig eerst een vinger, zij weet hoe het hoort.
'Maar het is toch niet 297, maar 303, meneer?'
'Neeeheee, kijk nou…', begin ik mijn antwoord totdat ik mijn fout zie staan. 'O ja…'
Dan is het hek van de dam. 'Hij kan zelf niet eens wiskunde!', gilt Dirk triomfantelijk.
'Ja, nu snap ik er helemaaaaaal niets meer van.'
Evelien ruikt bloed en Geert draait zich maar weer eens om. Zucht.

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds ruim een jaar werkt hij weer in het onderwijs; hij heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

Aankondiging / Masterclass UT

De afdeling Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente organiseert in 2005 voor de tweede maal een masterclass voor leerlingen uit 5-vwo met een bètaprofiel. De masterclass bestaat uit zeven middagen in de periode februari tot en met april en vindt plaats op de Universiteit. In de masterclass kunnen de leerlingen, onder begeleiding van docenten van de universiteit, werken aan hun profielwerkstuk wiskunde, dat tevens het eindwerkstuk van de masterclass kan zijn.
De Masterclass laat leerlingen kennis maken met het vakgebied van de wiskunde aan een universiteit. In tegenstelling tot wat veel leerlingen denken is het vakgebied verre van afgerond en vindt er nog veel wiskundig onderzoek plaats. In de masterclass maken de leerlingen kennis met enkele alledaagse problemen, en de wijze waarop wiskundigen daarop een antwoord proberen te vinden. Het is tevens een goede manier om kennis te maken met de Universiteit Twente en de sfeer op de campus.
Leerlingen die interesse hebben, kunnen zich opgeven via *www.schoolsite.utwente.nl*, bij *D.dalenoord@utwente.nl*, of door zich in te schrijven via de eigen wiskundedocent.

GROOT ZWOLSCH BARTJENS REKENDICTEE

[Gertrude van Keulen]

Vraag 2 ***Getal gezocht***

7	42
11	110
20	380
5	…

Welk getal hoort er bij 5?

Vraag 10 ***Natte spons***

Een natte spons weegt 1 kilo. Dit gewicht bestaat voor 99% uit water. Knijp de spons zodanig uit dat het gewicht nog maar voor 98% uit water bestaat. Hoeveel gram weegt hij nu?

Vraag 11 ***Bartjens als Rederijker***

Hoeveel seconden hebben 5 dichters nodig om 30 dichtregels over te schrijven, als 2 dichters 20 seconden nodig hebben voor 6 dichtregels?

FIGUUR 1

Bartjensweek in Zwolle

Tijdens de week van 15 tot en met 19 november jl. werd in Zwolle de zogeheten 'Bartjensweek' gehouden. In 2004 was het namelijk 400 jaar geleden dat van de Zwolse schoolmeester Willem Bartjens het beroemde rekenboekje *De Cijfferinghe* verscheen. Aanleiding voor dr. Danny Beckers, dr. Marjolein Kool en dr. Harm Jan Smid om dit boek als facsimile, voorzien van een cultuurhistorische inleiding, uit te geven als deel 2 in de serie 'Rekenmeesters'.[1]
Om de herinnering aan Bartjens levend te houden hebben VVV Zwolle en de Gemeente Zwolle de handen ineen geslagen om een ware Bartjensweek te organiseren. Samen met de initiatiefnemers werden er verschillende activiteiten georganiseerd.

Volgens Bartjens

Schoolmeester Willem Bartjens gaf zijn rekenlessen eerst in Amsterdam en later in Zwolle, als stadsschoolmeester van de 'Fransche school'. Het boek van de Hollandse rekenmeester was tot ongeveer 1800 het meest gebruikte rekenboek in het Nederlands onderwijs. Als iemand overtuigd was van de juistheid van een berekening, gebruikte hij de uitdrukking: 'Het klopt volgens Bartjens.' Deze spreekwoordelijke uitdrukking is tot op de dag van vandaag in gebruik. De heruitgave van *De Cijfferinghe* ligt inmiddels in de boekhandel. De presentatie van deze heruitgave vond plaats op 19 november jl. in het oude woonhuis van Willem Bartjens aan de Praubstraat nr. 14 te Zwolle, waar hij vanaf 1618 ook zijn school hield.

Rekendictee

Aan het begin van de Bartjensweek deden ruim 1300 derdeklassers van Zwolse middelbare scholen mee aan het Bartjens Scholierenrekendictee. Er waren drie prijzen per school te winnen; de winnaars van de 1e prijs ontvingen naast een mp3-speler de uitnodiging om deel te nemen aan het 'Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee' dat gehouden werd op 18 november 2004 te Zwolle.
Dit rekendictee heeft de potentie om de tegenhanger te worden van het Groot Dictee der Nederlandse Taal. Tijdens dit, voor de eerste keer gehouden, rekendictee namen prominenten het op tegen de zes winnaars van de middelbare scholen en tegen andere deelnemers. De opgaven van zowel het Scholierenrekendictee als het Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee kwamen van de hand van Marjolein Kool, die ook als Pabo-docent rekenen/wiskunde te Utrecht (Hogeschool Domstad) door het leven gaat. De jury onder voorzitterschap van Ed de Moor bestond verder uit Wim Schaafsma (mede-initiatiefnemer van de Bartjensweek en



wiskundedocent aan het Greijdanuscollege te Zwolle), Belinda Terlouw (Katholieke Pabo Zwolle), Danny Beckers (mede-redacteur van De Cijfferinghe) en Jaap Vedder (voorzitter van de NVORWO).

De presentatie van deze ludieke rekenwedstrijd was eveneens in handen van Marjolein Kool, één van de redacteuren van de heruitgave van *De Cijfferinghe*. Als ervaren spreekstalmeester praatte zij de sommen op een dusdanig prettige manier aan elkaar, dat de deelnemers ook nog wat geschiedenisfeitjes uit de tijd van Bartjens konden leren. Nadat Marjolein de 52 deelnemers moed in gesproken had, bogen dezen zich over 14 pittige rekenopgaven. In de opgaven kwamen onder meer breuken, verhoudingen en getallenreeksen voor.[2] De toegestane rekentijd varieerde van 20 seconden tot 2 minuten.
De drie slechtst gemaakte opgaven waren *Getal gezocht* (door 28 deelnemers goed beantwoord), *Bartjens als Rederijker* (25 goed) en *Natte spons* (21 goed); zie figuur 1, de vragen 2, 11 en 10. Overigens kon men zich alleen bedienen van kladpapier, pen en het gebruik van de eigen hersenen. Rekenmachines en andere hulpmiddelen werden niet toegestaan.
Na 45 minuten zwoegen was er gelegenheid om, onder het genot van een hapje en drankje, met elkaar over de antwoorden in discussie te gaan.

Onder voorzitterschap van Ed de Moor keek de jury in de pauze alle antwoorden na. Bij de leerlingen behaalde **Guus Dijkerman** van de Van der Capellen Scholengemeenschap de meeste punten.
Geheel tegen de verwachting in kwamen er maar liefst 7 winnaars uit de bus met de maximale score. Deze zeven rekenwonders hadden alle antwoorden goed en dus moest er gekampt worden om de titel 'beste rekenaar volgens Bartjens'. Het juryteam had hiervoor een reservesom achter de hand. Uiteindelijk won **Eddy Danes**, wiskundedocent van het Greijdanus College te Zwolle, deze zinderende finale. Onder de overige zes winnaars waren vanzelfsprekend een aantal wiskundedocenten, maar ook Jaap Hagedoorn, wethouder van de Gemeente Zwolle, Marja Bos, hoofdredacteur van Euclides, een teamleider bij de Post en een student econometrie hadden alle vragen goed. Winnaar Eddy Danes kreeg een enorm prijzenpakket waarmee hij erg content was. Dit prijzenpakket bestond uit een groot spellenpakket en een boekenbon aangeboden door Uitgeverij Van Gorcum, uitgever van het tijdschrift 'Volgens Bartjens'. Verder ontving Danes als beste rekenaar een uitnodiging voor de feestelijke bijeenkomst, de volgende dag, ter ere van de heruitgave van Bartjens' *Cijfferinghe,* en kreeg hij tijdens die bijeenkomst een eerste exemplaar van het boek overhandigd.
Deze feestelijke presentatie van de heruitgave, op 19 november, vormde de afsluitende activiteit van de Bartjensweek.

Elk jaar?

Bij het Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee was de pers rijkelijk vertegenwoordigd. RTV Zwolle deed verslag via een uitzending op televisie, maar ook diverse radiostations (zoals Radio 2) maakten impressies van deze noemenswaardige avond.
Zowel onder de prominenten als onder de overige deelnemers was het enthousiasme groot. Er zijn bij de organisatie al verschillende reacties binnengekomen om er een jaarlijks terugkerend en misschien wel landelijk evenement van te gaan maken...
Kunnen we volgend jaar ook op ù *rekenen*?

Noten (red.)

[1] Voor een bespreking van deze heruitgave zie pagina 198.
[2] De opgaven van het Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee zijn te vinden op
- http://members.home.nl/schaafsma/bartjens/ en op
- www.volgens-bartjens.nl.

Over de auteur

Gertrude van Keulen is medewerker Promotie en Marketing van de Regio VVV Kampen-Zwolle-Vechtdal.
Voor nadere informatie over de plannen voor een tweede rekendictee kunt u haar bereiken via de e-mail (gertrudevankeulen@vvvzwolle.nl) of per telefoon (038-4216798).

GRAFISCHE REKENMACHINES IN HET VMBO

Ervaringen in de onderbouw van de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg

[Ruud Jongeling]



FIGUUR 1

Inleiding

Ongeveer een jaar geleden werd me in het kader van een kortlopend onderwijsonderzoek gevraagd eens na te denken over de bruikbaarheid van de grafische rekenmachine in het vmbo. Zelf ben ik werkzaam in de onderbouw van de basis- en kaderberoepsgerichte leerwegen, al dan niet met leerwegondersteuning. De rekenmachines die de leerlingen gebruiken zijn de TI-30 en de Casio FX-82, beide met een tweeregelige display. De vraag of de grafische rekenmachine iets kan betekenen voor deze leerlingen leek me nogal gewaagd. Is zo'n rekenmachine voor deze leerlingen niet erg ingewikkeld en hebben ze al die geavanceerde mogelijkheden wel nodig? Is het eigenlijk niet hetzelfde als met een Formule-1 wagen rijden door de dorpsstraten van Kapelle?

De rekenmachine die ik toegestuurd kreeg was een andere dan de TI-83 die ik gezien had bij een bijlesleerling van het atheneum en die ik kende uit de vaktijdschriften. De TI-73 oogt eenvoudiger en heeft andere functies (zie figuur 1).

Al experimenterend, een handleiding zat er niet bij, ontdekte ik een aantal mogelijkheden waarvan ik dacht dat die in het vmbo van pas zouden komen.
- Het grote display van een grafische rekenmachine laat de leerling beter zien welke berekeningen hij of zij gemaakt heeft. Een open deur misschien, maar wel een die de leerlingen bleken te waarderen.
- Het rekenen met breuken is overzichtelijk: de notatie is zoals in het lesboek, de invoer, het vereenvoudigen en het omrekenen van breuk naar decimaal getal hebben alle drie een eigen toets.
- Onder de [CONVERT]-toets bleek een zeer krachtige functie schuil te gaan: het omrekenen van eenheden. Bijvoorbeeld van meters naar centimeters, van liters naar milliliters of van dagen naar uren.
- De applicatie *NumLine* laat een getallenlijn zien. Met pijlen wordt de ingetoetste som op de display getoond.

Over het grafische gedeelte was ik minder tevreden.
- De realistische formules die wij bij wiskunde gebruiken, moeten voor de rekenmachine worden omgezet naar de abstracte variabelen X en Y1.

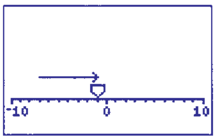
- Welke kant op wijst de pijl bij een optelsom? ________________

- Typ een nieuwe som in: 5 - 7 =

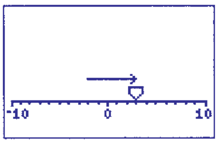
- Welke kant op wijst de pijl bij een aftreksom? ________________

- Streep door: Bij een optelsom wijst de pijl naar *rechts/links*
  bij een aftreksom wijst de pijl naar *rechts / links.*

-Schrijf de som op bij de twee onderstaande getallenlijnen.



Som:__________



Som:__________

- Maak de volgende som met de rekenmachine: -2 + - 4 =
  Let op de richting van de pijl!

- Welke som tekent de rekenmachine op de getallenlijn? ________________

- Maak de volgende som met de rekenmachine: 5 + - 8 =

- Welke som tekent de rekenmachine op de getallenlijn? ________________

- Maak de volgende sommen met de rekenmachine, schrijf de som van de getallenlijn erachter:

-3 + - 4 =	=	2 + - 7 =	=	-3 + - 6 =	=
8 + - 5 =	=	-9 + - 1 =	=	5 + - 9 =	=

- Maak de zin af: een negatief getal optellen is hetzelfde als ____________________.

R.Jongeling - 220104

FIGUUR 2

- De menu's om bijvoorbeeld het venster en de grafiek in te stellen leken mij voor onze leerlingen erg ingewikkeld.
- Een schaalverdeling langs de assen ontbreekt.

Ik hield aan de machine een dubbel gevoel over. Het grafische deel van de rekenmachine leek me erg ingewikkeld voor de leerlingen. Zou je niet beter op de computer met bijvoorbeeld VU-grafiek terecht kunnen? Aan de andere kant zag ik in de overige functies ook mogelijkheden.

Enige tijd later werd me gevraagd of ik de TI-73 in de klas zou willen inzetten[1]. Dat leek me wel wat en al snel had ik 10 rekenmachines tot mijn beschikking. Ik heb ze gebruikt in de eerste en tweede klassen, in zowel de leerwegondersteuning als in de reguliere vmbo-klassen. Niet alle hoofdstukken waren even geschikt. De rekenmachines bleven dan in de kast.

De eerste klas

De TI-73 werd in de eerste klassen bij het hoofdstuk over negatieve getallen voor het eerst gebruikt. Ik had drie werkbladen gemaakt[2].
Het eerste werkblad leerde de leerlingen omgaan met de rekenmachine en met name het programma *NumLine*. In de reguliere vmbo-klassen was dit werkblad de start. Bij de leerwegondersteuning werd klassikaal gestart en liepen we stap voor stap op de rekenmachine de procedure door. Daarna gingen ook deze leerlingen aan de slag met hetzelfde werkblad. De start was voor mij als docent bijzonder arbeidsintensief. Hadden de leerlingen meerdere keren met de TI-73 gewerkt dan leverde de bediening weinig vragen meer op.

In het tweede werkblad (zie figuur 2) telden de leerlingen een negatief getal op. Ze ontdekten door te kijken naar de richting van de pijl, dat het optellen van een negatief getal vervangen kan worden door een aftrekking.
Bij ongeveer de helft van de reguliere leerlingen lukte dat. In de leerwegondersteuning heb ik na ongeveer 20 minuten het werk stilgelegd. In de vorm van een klassengesprek werd bekeken welk verband de leerlingen hadden ontdekt. Daarna konden leerlingen

dit verband controleren op hun rekenmachine.

Het derde werkblad[2] was vergelijkbaar met het tweede blad maar nu ging het om het aftrekken van een negatief getal. Bij de rest van het hoofdstuk en de toetsen mochten de leerlingen de rekenmachine blijven gebruiken. De meeste leerlingen maakten van deze mogelijkheid gebruik.

In het hoofdstuk 'Meten en eenheden' kon de *convert*-functie van de rekenmachine worden gebruikt. Aan de hand van een werkblad leerden de leerlingen de procedure en konden ze een aantal sommen oefenen. Ze mochten daarna zelf kiezen of ze de machine bleven gebruiken of niet. De vraag overtrof het aantal rekenmachines.

De tweede klas

In de tweede klassen werd vooral het formuledeel van de rekenmachine gebruikt - eerst bij het hoofdstuk over formules, het invoeren van de formules en de tabelfunctie van de machine. Het tekenen van grafieken kwam een aantal maanden later aan bod bij het hoofdstuk over verbanden. Wanneer de leerlingen voor het eerst met de machine werken heb je het als docent erg druk. Ondanks het feit dat de leerlingen elkaar helpen blijven er toch erg veel vragen over. Slecht lezen, instructies overslaan en de onbekendheid met de machine zijn de belangrijkste oorzaken. Na verloop van tijd raken de kinderen gewend aan de systematiek van het apparaat. Ze weten hoe ze een formule moeten invoeren, hoe ze de tabel kunnen instellen en aflezen. Daarnaast kunnen ze de assen instellen en met de *trace*-functie waarden uit de grafiek aflezen. Als hulp had ik een 'werkkaart' gemaakt[2]. Ze konden daarop lezen hoe bepaalde instellingen ook al weer gingen.

De leerlingen mochten aan het begin van het hoofdstuk kiezen of ze met de rekenmachine wilden werken.
De tien leerlingen die daarvoor kozen gebruikten de machine het hele hoofdstuk en bij de toetsen. Twee sommen waren omgewerkt naar een werkblad om te leren omgaan met de GR. De overige sommen moesten de leerlingen zonder de hulp van een werkblad oplossen. Het resultaat van iedere som op de GR moesten de leerlingen aan mij laten zien. Na een paar lessen kwam er ruimte in de tijd om in een kort gesprekje met de leerling te bespreken wat de grafiek voorstelde.
Wat mij opviel was dat de leerlingen weinig problemen hadden met het omwerken van een woordformule naar de abstracte x/y-formule van de rekenmachine. Dat gold ook voor de leerlingen in de leerwegondersteuning. Ze konden na verloop van tijd goed aangeven welke variabele bij de horizontale en welke bij de verticale as hoort. Als ze een waarde hadden afgelezen met de *trace*-functie, konden vrijwel alle leerlingen vertellen wat de twee getallen voorstelden. Ook een snijpunt van twee grafieken kon men over het algemeen goed interpreteren.
Voor de snelle leerlingen had ik een werkblad gemaakt waarin niet-lineaire verbanden aan de orde kwamen. Ik was benieuwd of mijn bevindingen bij lineaire verbanden stand zouden houden bij andere verbanden. Dat viel niet tegen. De meeste leerlingen konden het verband tussen de hoogte en de tijd van een parachutist goed leggen. Het verband tussen de snelheid en de remweg vond men moeilijker.

Het hoofdstuk over verbanden in de tweede klas is erg gericht op het construeren van grafieken. Heb je een GR, dan zou je bij zo'n hoofdstuk eigenlijk andere vragen moeten stellen: niet zozeer 'construeer de grafiek', maar 'wat betekent de grafiek', 'wat betekenen snijpunten', enz. De grafieken hoeven dan ook niet allemaal rechte lijnen te zijn.

Besluit

De grafische rekenmachine is in de onderbouw van de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg, al dan niet met leerwegondersteuning, bruikbaarder dan ik in eerste instantie had gedacht. Het liefst zou ik de machine inzetten om leerlingen te laten onderzoeken en ontdekken. Het gaat me dan niet alleen om wiskundige verbanden zoals bij de negatieve getallen in het eerste leerjaar of het verband tussen de richtingscoëfficiënt en de hellingshoek van de grafiek in het tweede jaar. Je kunt de GR in combinatie met randapparatuur ook gebruiken om te onderzoeken of de koelkast nog goed werkt, hoe de spanning op het stopcontact varieert of hoe het verband is tussen de temperatuur en het dag/nachtritme. Aan dat laatste ben ik afgelopen jaar nog niet toegekomen, maar gelukkig wacht in het wiskundelokaal een nieuwe lichting leerlingen.

Noten

[1] Het project is een activiteit van het Freudenthal Instituut. De rekenmachines zijn op drie vmbo-scholen in verschillende leerwegen en in verschillende leerjaren ingezet.
[2] De door mij gebruikte werkbladen en een volledig lesverslag van klas 2D is te vinden op de NVvW-website (www.nvvw.nl/download/eucl804.zip).

Over de auteur

Ruud Jongeling (e-mailadres: rjongeling@tiscali.nl) is docent wiskunde in de onderbouw van het vmbo, basis/kader/lwoo, aan het Da Vinci College in Roosendaal.

2. Langs een weg van 99 km lengte staan 100 kilometerpalen. Op elk daarvan is de afstand tot het begin van de weg en eveneens die tot het eind van de weg vermeld op de volgende manier:
0–99, 1–98, 2–97, enz.
Op hoeveel van die palen staan slechts twee verschillende soorten cijfers?
Beantwoord dezelfde vraag voor een weg van 999 km lengte.

14. Uit de rij van de natuurlijke getallen (1, 2, 3, 4, 5, 6, …) verwijdert men de getallen 1, 3, 6, 10, 15, 21, … (voor $n \geq 2$ geldt: het *n*-de verwijderde getal is *n* groter dan het (*n* – 1)-ste verwijderde getal).
Bereken het duizendste getal van de rij, die nu overblijft.

20. De som van een aantal natuurlijke getallen (waaronder ook wel gelijke mogen voorkomen) is 20; hun produkt is maximaal.
Welke getallen zijn dat?

23. Bepaal alle paren natuurlijke getallen, waarvan het produkt gelijk is aan het tienvoud van de som.

25. Bepaal het kleinste natuurlijke getal *x* met de eigenschap dat er tussen $\frac{x}{20}$ en $\frac{x}{19}$ precies één natuurlijk getal ligt.
Bepaal ook het grootste natuurlijke getal *x* met die eigenschap.
Bepaal het kleinste natuurlijke getal *x* met de eigenschap, dat er tussen $\frac{x}{20}$ en $\frac{x}{19}$ precies twee natuurlijke getallen liggen.

29. Een getal bestaat uitsluitend uit de cijfers 1, 2, 3, 4, 5. Voor elk tweetal cijfers van dat getal geldt: staan ze naast elkaar, dan zijn ze verschillend; zijn ze gelijk, dan zijn al hun buren verschillend.
Bepaal het grootste getal, dat deze eigenschappen heeft.

Rekenopgaven, voorkomend onder de 'Denkertjes' in de vierde jaargang van Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren (1964-1965).

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).



WELTMEISTERSCHAFT KOPFRECHNEN 2004

Eind oktober 2004 vond in het Duitse Annaberg-Buchholz het eerste wereldkampioenschap hoofdrekenen plaats. Een Nederlandse delegatie van geïnteresseerden reisde af naar dit evenement. Van tevoren was niet duidelijk wat te verwachten was. Wat zijn dat eigenlijk voor mensen, die rekenwonders? Zijn hun vermogens slechts aan weinigen gegeven? Of kan iedereen een rekenwonder worden?

[Chris Zaal]

PROFIEL 1 La aventura del calculo



Zittend in de bus of lopend op straat, waar hij ook is, altijd is Alberto Coto aan het rekenen. Zijn liefde voor getallen begon op vijfjarige leeftijd toen hij van zijn familie leerde tellen bij het kaarten. Al heel snel deed hij de puntentelling sneller dan zijn ouders, broers en zussen.
In het Guinness Book of Record staat Coto vermeld als recordhouder in het optellen van 100 ééncijferige getallen. Zijn recordtijd is 19.23 seconden. In één seconde telt hij dus vijf cijfers bij elkaar op. Hij is een zuiver *visuele* rekenaar die uitkomsten niet berekent, maar 'ziet'.
De 34-jarige Coto is afkomstig uit het Spaanse Asturias. Van opleiding is hij universitair econoom. In de negentiger jaren zag hij in een televisieshow iemand uit het hoofd een vermenigvuldiging berekenen, die hij zelf veel sneller bleek te kunnen. Hij realiseerde zich dat hij een bijzondere gave had, en besloot zich op het hoofdrekenen te werpen. Sindsdien geeft hij rekendemonstraties, zowel voor scholen als bedrijven. Ook treedt hij regelmatig op in Spaanse televisieprogramma's. Hij is auteur van het boek *La aventura del calculo, como calcular mejor*.
Website: *www.albertocoto.com*

PROFIEL 2 Allround wereldkampioen 2004



Op elfjarige leeftijd zag Robert Fountain op de Britse televisie het Nederlandse rekenwonder Wim Klein een demonstratie geven. Toen dacht hij: 'Dat wil ik ook.' Sindsdien beoefent hij hoofdrekenen als hobby.
De 35-jarige kernfysicus uit het Engelse Cheshire werkt in de *nuclear physics consultancy*: hij voert veiligheidsscreeningen uit voor kerncentrales. Hij heeft natuurkunde gestudeerd en is gepromoveerd in de quantummechanica. Zijn hobby's zijn, naast hoofdrekenen, mathematical problem solving en voetbal.
Bij de *Minds Sports Olympiad* werd hij in de afgelopen jaren twee keer eerste en drie keer tweede.
Op het wereldkampioenschap in Annaberg-Buchholz werd Fountain de allround wereldkampioen hoofdrekenen 2004. Op de hoofdonderdelen werd hij respectievelijk 5e (kalenderrekenen), 3e (optellen), 7e (vermenigvuldigen), 3e (worteltrekken). Op de laatste verrassingsopgave scoorde hij maximaal.
De grootste kracht van Fountain bij het hoofdrekenen is zijn wiskundig inzicht. Hij gebruikt de wiskundige structuur van getallen. De rol van het geheugen is bij het hoofdrekenen minimaal. Als voorbeeld geeft hij: $17 \times 48 = 34 \times 24 = 102/3 \times 3 \times 8 = 102 \times 8 = 816$.
Ander voorbeeld: $23/77 = 299/1001 \approx 0{,}299\ldots$
Websites: *www.mentalcalculation.com* en *www.msoworld.com*

Gewone mensen

'Dom, dom, dom', geeft Scott Flansburg toe. Op het wereldkampioenschap hoofdrekenen probeerde hij bij het onderdeel optellen ter plekke een nieuwe methode: de tien op-te-tellen getallen telde hij niet met één cijfer tegelijk op, maar voor de verandering met *twee* cijfers. Hij maakte echter een fout met het 'onthouden', daarmee vergiste hij zich in de positie. Zijn score: 0 uit 10 opgaven.
Bij het vermenigvuldigen was de Nederlander Jan van Koningsveld favoriet. Zijn score op dit onderdeel bedroeg slechts 6 uit 10. 'Zenuwen', geeft hij lacherig toe. 'Door de spanning blokkeerden mijn hersens bij de tweede opgave, en daarvan kon ik me niet meer goed meer herstellen.' Hoofdrekenaars zijn dus geen machines. Net als gewone mensen maken ze rekenfouten en hebben ze last van zenuwen.

Schriftelijk eindexamen

Zaterdagmorgen 30 oktober 2004. In een hoge witte zaal van het culturele centrum van het stadje Annaberg-Buchholz staan drie rijen van zes tafeltjes opgesteld. Achter de tafeltjes zestien mannen en één vrouw. De sfeer is die van een eindexamen. Een laag hekje scheidt de kandidaten van de pers (Reuters, NDR, WDR). Van tevoren neemt de organisatie nog een keer de spelregels door, een hele lijst. Elke kandidaat heeft een waarnemer naast zich die in de gaten moet houden dat alleen het antwoord opgeschreven wordt en verder niets.
Elk onderdeel begint met een minuut concentratie. Na het startsignaal storten de deelnemers zich op de opgaven. Daarna heerst er zo'n 5 à 10 minuten absolute stilte. Onhoorbaar zoemen de hersens. Met een handgebaar geeft een enkele deelnemer aan, eerder klaar te zijn.
De ontspanning komt nadat de opgaven ingenomen zijn. De deelnemers staan op en wisselen ervaringen uit. Ze hebben al een dag met elkaar opgetrokken en zijn geen vreemden meer voor elkaar. Ze slaan elkaar op de schouder, troosten elkaar, lachen. De met televisiecamera's gewapende journalisten stappen op de deelnemers af, nemen korte mini-interviews af.
De meeste hoofdrekenaars staan de pers professioneel te woord, ze zijn deze media-aandacht blijkbaar wel gewend.
Dat dit het allereerste wereldkampioenschap hoofd-rekenen is, valt vooral goed te merken aan de organisatie. Tussen de verschillende onderdelen zitten zeker 30 à 40 minuten. De deelnemers lopen ontspannen rond, maken met iedereen een praatje. Intussen is de organisatie druk bezig met het

PROFIEL 3 Rambo kan rekenen!



Hoeveel is 99 verheven tot de 20ste macht? Op het podium staat het 33-jarige Duitse rekengenie Rüdiger Gamm uit het plaatsje Altdorf, dichtbij Stuttgart. Hij sluit de ogen, maakt met zijn linkerhand van links naar rechts een paar bezwerende gebaren. Dan somt hij het resultaat op, één hand ritmisch meebewegend: 8 hextriljard, 179 hextriljoen, 69 quintriljard, 375 quintriljoen, 972 quadriljard, 308 quadriljoen, 708 triljard, 891 triljoen, 986 biljard, 605 biljoen, 443 miljard, 361 miljoen, 898 duizend en 1. Een klaterend applaus valt hem ten deel.
Zijn eerste openbare optreden maakte hem onmiddellijk beroemd. In het televisieprogramma 'Wetten, dass ...' loste hij uit het hoofd vergelijkbare sommen op: verschillende tweecijferige getallen verheven tot de 12e macht. Daarmee won hij de hoofdprijs. Sinds die tijd trekt Rüdiger Gamm door Duitsland, Oostenrijk en Zwitserland. Hij treedt op voor scholen en bedrijven, geeft hoofdrekendemonstraties en workshops over *mental training*.
Belgische en Japanse neurowetenschappers hebben het brein van *der Rüdiger* onderzocht. 'De meeste rekenaars werken alleen met het kortetermijngeheugen. Bij mij wordt ook het langetermijngeheugen ingezet', legt hij uit. Voor het memoriseren gebruikt Gamm zeer speciale gebieden in de rechterhersenhelft, zo rapporteerde de onderzoeksgroep van de Belg Mauro Pesenti in Nature (zie [3]).
Met hoofdrekenen is dit rekenwonder pas op 21-jarige leeftijd begonnen. Tot die tijd spookte hij naar eigen zeggen niets uit. Hij begon eerst met bodybuilden, maar ging na zijn succesvolle televisieoptreden over op hoofdrekenen. Krachtsport beoefent hij nog steeds.
Website: *www.ruediger-gamm.com*

PROFIEL 4 Human Calculator



In het Guinness Book of Records staat de 40-jarige, uit Phoenix Arizona afkomstige Scott Flansburg vermeld als de *Fastest Human Calculator*. Binnen 15 seconden kan hij de tafel van elk willekeurig getal van twee cijfers opnoemen: 37, 74, 111, ... , als een machinegeweer ratelen de getallen uit zijn mond: ... , 1258, 1295. Vijfendertig getallen binnen een kwart minuut.
Een *mathlete*, zo noemt Flansburg zichzelf. Hij reist de USA rond als de *Human Calculator*. Hij treedt op in televisieshows (o.a. bij Oprah Winfrey) en geeft op scholen rekendemonstraties. Op wiskundeonderwijs-congressen, o.a. van de NCTM, is hij een veelgevraagd spreker. Met zijn *Math Magic Square* (een 10 bij 10 veld van de getallen 00 tot en met 99) onderwijst hij de principes van het hoofdrekenen.
Flansburg ontdekte zijn gave op 10-jarige leeftijd toen een vriendje op school liet zien hoe je op een rekenmachine de tafel van 28 krijgt door 28 + 28 = in te toetsen, en dan herhaald op de =-toets te blijven drukken. Scott kon dit uit zijn hoofd – en even snel! Als hij tafels berekent, ziet Flansburg de getallen als in een tunnel aan zich voorbij schieten.
Website: *www.humancalculator.com*

controleren van de antwoorden en het verwerken van de resultaten. Nadat de uitslag van het vorige onderdeel bekendgemaakt is, begint het volgende onderdeel.

Professionals en amateurs

De organisatie van het WK Hoofdrekenen rekende op 24 deelnemers. Drie daarvan zegden af, waaronder het Duitse rekenwonder Dr.Dr. Gert Mittring. Door geld- of visumproblemen lukte het vier anderen niet naar Annaberg-Buchholz te komen.
De 17 aanwezige deelnemers – 16 mannen en één vrouw – vormden in velerlei opzichten een bont gezelschap: een mix van professionals en amateurs, maar ook van specialisten en allrounders. De Duitser Mattias Kesselsläger is zo'n specialist. Hij werd eerste op het onderdeel kalenderrekenen. Uit het hoofd berekende hij binnen 60 seconden van 33 willekeurige data de bijbehorende weekdag. De Duitse Silke Betten werd op dit onderdeel derde, met 20 correcte dagen. Zij nam alleen aan het kalenderrekenen deel. Niet echt verwonderlijk, wanneer je bedenkt dat zij pas twee maanden daarvoor begonnen is met hoofdrekenen.

De verschillen tussen de deelnemers komen vooral tot uitdrukking wanneer je kijkt naar de manier waaróp ze rekenen. Sommige hoofdrekenaars doen een essentieel beroep op het *geheugen*, relevant voor bijvoorbeeld het kalenderrekenen. Recordhouders kennen hele tabellen met speciale waarden uit hun hoofd. Indrukwekkend is het geheugen van het Duitse fenomeen Rüdiger Gamm, die van alle getallen van 0 tot en met 99 de twaalfde machten uit het hoofd kent. Idem dito de 18e, de 20e en de 33e macht.
Er zijn ook hoofdrekenaars die hun geheugen niet echt inzetten. De Britse wereldkampioen Robert Fountain zegt zijn langetermijngeheugen niet te vullen met getallen en tabellen. Hij is het schoolvoorbeeld van een *flexibel rekenaar* – als exacte wetenschapper maakt hij gebruik van allerlei (zelfbedachte) trucjes die het rekenproces versnellen. Fountain kent alle kwadraten van de getallen 0 tot en met 100 uit zijn hoofd, maar hij oefent daar niet speciaal op.
De Spanjaard Alberto Coto is eveneens een rekenaar die geen speciaal beroep doet op het geheugen.

Vier disciplines, zes rondes

Aan het wereldkampioenschap namen zestien mannen en één vrouw deel, afkomstig uit alle delen van de wereld: Duitsland, Engeland, Spanje, Iran, Pakistan, India. De deelnemers bestreden elkaar op vier onderdelen: kalenderrekenen, optellen, vermenigvuldigen en worteltrekken. Bij het kalenderrekenen moesten de deelnemers van een serie data de weekdag berekenen.
Bij het optellen was de opgave, uit het hoofd tien getallen van tien cijfers bij elkaar op te tellen. De winnaar Alberto Coto (Spanje) loste binnen 5 minuten en 15 seconden alle tien opgaven correct op. Bij het vermenigvuldigen won wederom Alberto Coto. Uit het hoofd scoorde hij binnen elf minuten 9 uit 10 (steeds twee 8-cijferige getallen keer elkaar). Het worteltrekken bestond uit het berekenen van wortels van 6-cijferige getallen in acht significante cijfers: drie voor en vijf na de komma. Jan van Koningsveld werd eerste op dit onderdeel, met een score van 68 uit 80 significante cijfers.
Voor het algemeen klassement volgden nog twee verrassingsrondes. De eerste verrassingsronde bestond uit opgaven als 534 × 460 × 155. Zowel de deelnemers als de organisatie toonden zich verrast door de uitslag: de maximale score was 1 uit 10. De tweede verrassing bestond uit vergelijkingen van het type $385 : x = 280 : 40$.
Deze ronde werd ex aequo gewonnen door de Brit Robert Fountain en de Iraniër Ali Bayat Movahhed, die beiden 10 uit 10 scoorden.
Allround wereldkampioen werd de Britse kernfysicus Robert Fountain (35). De Nederlander Jan van Koningsveld (35) werd in het eindklassement tweede.

Kalenderrekenen, vermenigvuldigen en worteltrekken

Het berekenen van de weekdag van een datum kan met een simpele formule. Voor een datum uit de 20e eeuw is de formule: $j + [j/4] + m + d$ (mod 7). Hier is j het 2-cijferige jaartal, m = 0, 3, 3, 6, 1, 4, ... een getal voor de maand, d de dag van de maand. Een voorbeeld: 26 juni 1960 geeft $60 + 15 + 4 + 26 \equiv 105 \equiv 0$ (mod 7) en valt dus op een zondag. Diverse trucs, waarbij je wat feiten moet onthouden, maken versnellingen van deze methode mogelijk.
Vermenigvuldigen van twee getallen gebeurt veelal met *kruisproducten*: 435 x 829 heeft als kruisproducten: 4 × 8 (de 10.000-tallen), 4 × 2 + 3 × 8 (de 1000-tallen), 4 × 9 + 3 × 2 + 5 × 8 (100-tallen), 3 × 9 + 5 × 2 (tientallen) en 5 × 9 (eenheden). Dan is het een kwestie van deze kruisproducten bij elkaar optellen, waarbij je de tussenresultaten op de een of andere manier in het geheugen moeten worden opgeslagen.
Worteltrekken gaat met Newtons methode. Als voorbeeld nemen we $\sqrt{51}$. Die wortel kunnen we benaderen met het getal 7. Maar als 7 een benadering is, dan ook $^{51}/_{7}$. Het gemiddelde van die twee benaderingen is $^{50}/_{7}$, en dat geeft een betere benadering van $\sqrt{51}$. Deze truc herhaald met $^{50}/_{7}$ geeft als volgende benadering 4999/350 ≈ 7,1414285..., correct tot op 7 decimalen. Bij deze methode moeten wel delingen uitgevoerd worden (uit het hoofd).

... nach Adam Ries

Het wereldkampioenschap hoofdrekenen 2004 werd georganiseerd in het Saksische mijnwerkersstadje Annaberg-Buchholz, woon- en werkplaats van de Duitse rekenmeester Adam Ries (1492-1559). Ries is de Duitse evenknie van onze Willem Bartjens. *'Nach Adam Ries'* is het Duitse equivalent van *'volgens Bartjens'*. Adam Ries is vooral bekend geworden door het 'rekenen op de lijn' – een schriftelijke versie van een telraam waarop gerekend wordt met eenheden, vijftallen, tientallen, vijftigtallen, honderdtallen, et cetera. In navolging van zijn werk wordt in de regio van Annaberg-Buchholz op scholen het *'Rechnen auf der Linie'* levend gehouden.

FIGUUR 1, 2 en 3

Maar Coto verschilt in één belangrijk opzicht van Robert Fountain. Coto is het prototype van de *visuele* rekenaar: hij 'ziet' getallen, hij 'voelt' de uitkomsten. Rekenen is voor Coto net zoiets als ademen: 'Ik reken altijd en overal: op straat, in de bus.'

Linker- en rechterhersenhelft

'Er is een type hoofdrekenaar dat veel oefent en actief methoden bedenkt, en een ander type dat dingen 'ziet', optelt en vermenigvuldigt', zegt het Nederlandse delegatielid Truus Dekker. 'Uit je hoofd leren kan iedereen. Dingen 'zien' niet, dat is typisch mannelijk.' In zijn boek *The Great Mental Calculators* plaatst Steven Smith tegenover het visuele type de *auditieve* rekenaar (zie [4]). Auditieve rekenaars murmelen, ze hebben behoefte getallen uit te spreken. Bij het rekenen maken ze vooral gebruik van het taal- en spraakcentrum. Sommige auditieve rekenaars gebruiken lettercodes voor cijfers en getallen.
Het verschil tussen het auditieve type en het visuele type komt grofweg overeen met het verschil tussen linker- en rechterhersenhelft. Vanuit de neuropsychologie is bekend dat het algoritmische rekenen een talig karakter heeft en – bij rechtshandigen – in de linkerhersenhelft zetelt, terwijl het ruimtelijk voorstellingsvermogen in de rechterhersenhelft gelocaliseerd wordt (zie [1]). Neurowetenschappers hebben daar zelfs een soort neurologische getallenlijn ontdekt (zie [2]).
Met het verschil tussen linker- en rechterhersenhelft is niet alles gezegd. Het Duitse rekenwonder Rüdiger Gamm benadrukt het belang van het *corpus callosum*, dat de brug vormt tussen beide hersenhelften. Voor het bedrijfsleven geeft Gamm workshops in *Mental Training*, waarbij het doel is linker- en rechterhersenhelft te synchroniseren.
De Nederlander Jan van Koningsveld beschikt weer over andere kwaliteiten: hij is uitzonderlijk *snel*. Hij is houder van het wereldrecord vermenigvuldigen: in 38.1 seconden twee achtcijferige getallen keer elkaar. 'Alleen als ik mijn innerlijke stem afzet, kan ik vliegensvlug rekenen', zegt hij. De rekenprocessen in zijn hoofd lijken onbewust en bijna automatisch te verlopen.
Behalve zijn snelheid noemt Jan van Koningsveld zijn vasthoudendheid als belangrijke eigenschap. En

PROFIEL 5 Girl power



De 19-jarige belastingadviseuse Silke Betten uit het Duitse Emden hoorde van een collega dat aan het wereldkampioenschap hoofdrekenen 2004 geen vrouwen meededen. Dat vond ze niet goed. 'Meisjes zijn even goed in hoofdrekenen als jongens', zegt Silke. 'Alleen wordt deze eigenschap bij meisjes negatief gewaardeerd. Door de jongens in mijn klas werd ik voor gek uitgemaakt omdat ik goed kon rekenen.'
Twee maanden voordat het kampioenschap begon, besloot Silke Betten zich in te schrijven voor het WK. In acht weken bekwaamde ze zich in het onderdeel kalenderrekenen. Ze werd getraind door collega Jan van Koningsveld, ook deelnemer aan het WK. Over haar zegt hij: 'Silke heeft ongelooflijk veel talent, ze zou alleen nog wat harder moeten trainen. Bij het wereldkampioenschap memoriseren draait tegenwoordig ook een vrouw mee in de top. Dat toont aan dat vrouwen net zo goed kunnen zijn als mannen.'
Uiteindelijk werd Betten op het onderdeel kalenderrekenen derde, een topprestatie. Binnen 60 seconden berekende ze van twintig data de bijbehorende weekdag. Collega en trainer Jan van Koningsveld liet ze twee plaatsen achter zich.

PROFIEL 6 Zilver voor Nederland



De 35-jarige *Bilanzbuchhalter* Jan van Koningsveld uit het Duitse Emden is wereldrecordhouder uit-het-hoofd-vermenigvuldigen. Zijn wereldrecord dateert van 19 maart 2004: in precies 38,1 seconden wist hij twee achtcijferige getallen met elkaar vermenigvuldigen.
Als houder van het wereldrecord was Van Koningsveld favoriet op het onderdeel vermenigvuldigen (twee achtcijferige getallen keer elkaar). Door zenuwen werd hij op dit onderdeel vierde. Bij het worteltrekken eindigde hij echter als eerste. In het eindklassement behaalde hij uiteindelijk een tweede plaats. Oorspronkelijk was Divesh Ramanlal Shah uit India als tweede geëindigd, maar die bleek bij controle achteraf bij een van de onderdelen tegen de spelregels te hebben gezondigd door tussenresultaten op te schrijven.
Van Koningsveld is pas twee jaar geleden begonnen met hoofdrekenen. In juli 2002 ontmoette hij in Flensburg Alberto Coto en Gert Mittring, twee hoofdrekenaars van wereldklasse. Daar vernam hij iets van hun technieken. In september van datzelfde jaar begon hij serieus met trainen. In getallen is hij van jongs af aan geïnteresseerd. Wiskunde op school vond hij leuk, maar het leukste vindt hij toch het rekenen met getallen.
Hoe hoofdrekenen op topsnelheden precies werkt, kan hij moeilijk uitleggen. 'Binnen 40 seconden twee achtcijferige getallen vermenigvuldigen lukt me alleen als ik mijn innerlijke stem *afzet* en alleen nog maar de tussenresultaten *zie*', zegt Van Koningsveld: 'Licht is in dit geval sneller dan geluid.'

dat laatste is een *karaktereigenschap*, geen bijzondere begaafdheid. Vasthoudend of niet, alle deelnemers aan het wereldkampioenschap in Annaberg-Buchholz hebben zichtbaar plezier in het hoofdrekenen, alsook in het uitwisselen van ervaringen en methoden. Open en vriendschappelijk gaat men met elkaar om.

Wim Klein als inspiratiebron

Verbazend gewoon en toegankelijk, zo komen de deelnemers aan het wereldkampioenschap hoofdrekenen over. Veel van de WK-deelnemers zijn pas op latere leeftijd begonnen met hoofdrekenen. Dit wijkt af van het standaardbeeld van rekenwonders. Volgens Smith openbaart het hoofdrekentalent zich meestal op zeer jonge leeftijd, vaak rond het vijfde levensjaar (zie [4]). Voor een aantal WK-deelnemers klopt dit (Alberto Coto), maar voor anderen zeer zeker niet.
De Nederlander Jan van Koningsveld begon op zijn 33e, zijn college Silke Betten op haar 19e. De Brit Robert Fountain zag op elfjarige leeftijd op de Britse televisie een show van het Nederlandse rekenwonder Wim Klein alias Pascal alias Willy Wortel (1912-1986). 'Dat wil ik ook', dacht hij. Vanaf die dag begon hij met hoofdrekenen. Het Duitse fenomeen Rüdiger Gamm hield zich pas vanaf zijn 21e met hoofdrekenen bezig. Naar eigen zeggen heeft hij zijn hele middelbareschooltijd niets uitgespookt. Nadien besloot hij in één ding de beste van de wereld te worden. Aanvankelijk was dat bodybuilding, later werd dat hoofdrekenen.

Hoe wordt u een rekenwonder?

De motivatie van Silke Betten om mee te doen aan het Weltmeisterschaft Kopfrechnen was dat er zich nog geen vrouwen aangemeld hadden. Twee maanden voor aanvang begon zij zich te bekwamen in het kalenderrekenen. Ze werd derde. Met een beetje doorzettingsvermogen en goede wil kan iemand dus hoog eindigen op een hoofdrekenkampioenschap. Een geheugenkunstenaar hoef je daarvoor niet te zijn. Ook het kunnen 'zien' van getallen is geen vereiste. De Brit Robert Fountain deed het zonder beide en werd in Annaberg-Buchholz wereldkampioen.
Dat wil natuurlijk niet zeggen dat iedereen zomaar rekenwonder kan worden. Naast transpiratie is vooral

veel inspiratie nodig. Alle WK-deelnemers zeggen stuk voor stuk 'iets' met getallen te hebben. Allemaal houden ze van rekenen. Iemand die niet van getallen en van rekenen houdt, zal nooit een rekenwonder worden.

Hoofdrekenen en wiskunde

Bijna alle WK-deelnemers zeggen wiskunde niet leuk te vinden. Saai en vervelend, dat zijn de standaardreacties op (school)wiskunde. Houden van hoofdrekenen is blijkbaar iets anders dan houden van wiskunde. De WK-hoofdrekenaars geven aan dat de lol van het hoofdrekenen ligt in het perfectioneren van geautomatiseerde rekenprocessen die grotendeels onbewust verlopen. 'Bij hoofdrekenen op topsnelheid moet ik mijn innerlijke stem afzetten' zegt Jan van Koningsveld. Hoofdrekenen moet *vanzelf* gaan, daarin lijkt een deel van het plezier te liggen.
Met inzicht lijkt hoofdrekenen op WK-niveau niet zoveel te maken te hebben. Het wereldkampioenschap eindigde met twee verrassingsopgaven, en daarop werd bedroevend slecht gescoord. Bij de eerste verrassingsopgave (drie 3-cijferige getallen keer elkaar) was de maximale score 1 uit 10. Criticasters kunnen dit aangrijpen om hoofdrekenen af te doen als 'betekenisloze kunstjes'. Maar dit argument valt ook om te keren: hoofdrekenen is leuk juist omdát het vanzelf gaat, snéller dan het begrip. 'Begrip' is saai en vervelend omdat begrijpen niet vanzelf spreekt, en daardoor log en traag is.
Voor de rekenkunstenaars in Annaberg-Buchholz is hoofdrekenen in ieder geval een aangename en aanstekelijke bezigheid. De professionals onder hen –diegenen die van hun rekenshows leven– proberen allemaal hun enthousiasme over te dragen. Ieder van hen geeft, vaak onbetaald, rekendemonstraties op scholen. En om de vele 0 uit 10 scores op de WK-verrassingsopgaven maakt niemand zich echt druk. 'In al mijn demonstraties', zegt Scott Flansburg, 'vertel ik altijd dat alle rekenen begint bij nul.'

Dankwoord

De auteur bedankt Truus Dekker, Sonia Palha en Ed de Moor voor hun prettig gezelschap en voor het delen van hun inzichten tijdens het WK Hoofdrekenen in Annaberg-Buchholz.

Verwijzingen

[1] B. Butterworth: The mathematical brain. London: Macmillan (1999).
[2] S. Dehaene: Number Sense: Oxford University Press (1997).
[3] M. Pesenti, L. Zago, et al.: Mental calculation in a prodigy is sustained by right prefrontal and medial-temporal areas. In: Nature Neuroscience, 4(1), 2001, pp. 103-107.
[4] S.B. Smith: The Great Mental Calculators, The Psychology, Methods, and Lives of Calculating Prodigies, Past and Present. New York: Columbia University Press (1983).
[5] Websites:
- http://www.recordholders.org/en/events/worldcup04
- http://groups.yahoo.com/group/MentalCalculation
[6] Multimediaal: Op de website van Euclides (www.nvvw.nl/Euclides2.html) staat een link naar een filmpje van een rekendemonstratie van Rüdiger Gamm, waarin hij uit het hoofd 85^{33} 'berekent'.

Over de auteur

Drs. C.G. Zaal (e-mailadres: c.zaal@fi.uu.nl) is wiskundige en educatief ontwerper aan het Freudenthal Instituut.

Mededeling / Wiskunde Scholen Prijs 2005

Ook als u zelf denkt dat u 'niets bijzonders' doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de **Wiskunde Scholen Prijs**.
Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskunde-onderwijs naar buiten te treden.

Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs. Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen:
- basisvorming (klas 1 en 2)
- bovenbouw vmbo (klas 3 en 4)
- havo/vwo (de klassen 3 tot en met 6)

Voor elke categorie is een prijs van € 1000,00 beschikbaar.

In januari is naar alle scholen een folder met nadere informatie gestuurd. Heeft uw school belangstelling om mee te doen, meldt u zich dan vrijblijvend aan door vóór 15 februari a.s. een e-mail met uw naam en de adresgegevens van uw school te sturen naar *wiskids@fi.uu.nl*.
U ontvangt dan het aanmeldingsformulier met nadere instructies.

De Wiskunde Scholen Prijs wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut, met steun van het ministerie van OCenW.

Meer info: *http://www.wiskundescholenprijs.nl*

KINDEREN DIE NIET LEREN REKENEN

Opvattingen en discussie over dyscalculie en rekenproblemen

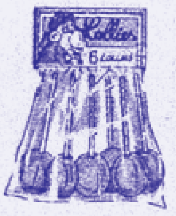
[Jo Nelissen]

Samenvatting
Jo Nelissen zet verschillende opvattingen over dyscalculie op een rijtje en adviseert het etiket 'dyscalculie' spaarzaam te hanteren. Het lijkt zinvoller om vast te stellen welke kinderen rekenproblemen hebben, wat die problemen zijn en hoe daar het beste aan gewerkt kan worden.

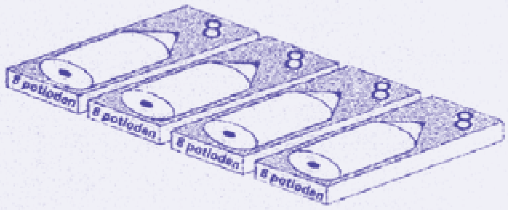
Inleiding: rekenproblemen
Sinds er rekenonderwijs wordt gegeven, zijn er kinderen die te kampen hebben met rekenproblemen. Rekenproblemen van kinderen, maar ook van volwassenen, kregen al zo'n honderd jaar geleden aandacht en ruim vijftig jaar geleden schreef de Groningse pedagoog Van Gelder (1952; zie [7]) over rekenstoornissen en rekenfouten. Hij bekritiseerde onder meer de opvatting van Henschen (uit 1919) dat rekenstoornissen een pathologische basis hebben.
Maar wat zijn het voor problemen waar de leerlingen last van hebben tijdens het leren rekenen? Het CITO doet al zo'n twintig jaar onderzoek naar de prestaties van Nederlandse basisschoolleerlingen op het gebied van rekenen-wiskunde (zie [9]). In periodieke peilingen wordt nagegaan welke mate van beheersing door de leerlingen op de verschillende reken-wiskundige gebieden is bereikt. Eind groep 5 is dat bijvoorbeeld onderzocht op het gebied van getallen en bewerkingen (zoals tellen en ordenen, structureren, optellen, delen, toepassingen, enzovoort) en op het gebied van meten (meten, tijd en geld).
Uit de analyses van de resultaten wordt een beeld verkregen van het *vaardigheidsniveau* dat door de leerlingen wordt behaald: van e, het laagste, tot a, het hoogste niveau. Tevens wordt geanalyseerd welke handelwijzen een leerling volgt, hoe een opgave wordt aangepakt en welk type opgaven een leerling wel of niet beheerst. Om een concreet voorbeeld te geven: bij vermenigvuldigen (item 1) zien de leerlingen 6 lollies afgebeeld en moeten ze de vraag beantwoorden hoeveel lollies in twee pakjes zitten. Deze opgave wordt door de d- en e-leerlingen (25% van de leerlingen!) veelal *tellend* opgelost. In item 9 zien de leerlingen 4 doosjes met daarop het cijfer 8 (potloden). De vraag is hoeveel potloden er zijn (zie figuur 1).
De oplossing kan niet worden gevonden op basis van tellen, terwijl deze leerlingen een hoger oplossingsniveau niet beheersen. Deze opgave wordt dan ook *niet* opgelost. Dat komt vooral omdat deze d- en e-leerlingen geen inzicht hebben in de structuur van getallen, omdat ze geen strategieën beheersen en niet reflecteren op hoe ze handelen. Toen ik eens een kind vroeg hoe het had gerekend, gaf het als antwoord: 'Ik weet niet hoe ik reken.'
De problemen waarvan die leerlingen last ondervinden tijdens het proces van leren rekenen, zo blijkt uit de analyses van het CITO, hebben betrekking op het uitvoeren van rekenoperaties (optellen, aftrekken, enzovoort) en op het automatiseren. Bovendien hebben deze leerlingen onvoldoende inzicht verworven (vooral in de opbouw van en de relatie tussen getallen) en komen ze in de problemen vanwege omslachtige of onjuiste toepassing van (geleerde) aanpakken.

Dyscalculie: verschillende opvattingen
Sinds een aantal jaren worden rekenproblemen steeds vaker als dyscalculie getypeerd. *Dys* betekent 'niet' en *calculeren* betekent 'rekenen'. Dyscalculie betekent dus 'niet kunnen rekenen'. Aan de term 'dyscalculie' werd door Van Gelder jaren geleden al uitvoerig aandacht geschonken. Hij maakte een onderscheid tussen 'acalculie' en 'dyscalculie'.
Acalculie doet zich voor als het *verlies* van een 'reeds verworven rekensysteem', doorgaans als gevolg van ernstige traumata van de hersenschors: de persoon kan *niet meer* rekenen. Van Gelder typeert dyscalculie als een ontwikkelingsstoornis, die optreedt bij 'het *aanleren* van het rekenen. De leerling ondervindt *beperkingen* tijdens het leerproces.' [Cursief van J.N.]
Van Gelder zal waarschijnlijk niet vermoed hebben dat 40/50 jaar later het begrip dyscalculie opnieuw leven zou worden ingeblazen. Ook niet dat het ruime gebruik ervan zou leiden tot een toenemende begripsverwarring. Een veelheid van opvattingen heeft inmiddels al het licht gezien. Het is mogelijk deze tot een viertal terug te brengen en wel de volgende.

1. Dyscalculie als aanduiding van rekenstoornissen die in principe bij alle leerlingen kunnen voorkomen en die in principe (ortho)didactisch te behandelen zijn. In de publicaties gaat het vooral om dyscalculie bij *jonge* leerlingen.
Onder deze opvatting schuilen echter weer verschillende interpretaties. Zo ziet Desoete (2003) dyscalculie als een hardnekkig uitvallen op het gebied van rekenen, 'zonder aanwijsbare reden'. Een aantal auteurs (onder andere Ruijssenaars e.a.; zie [12]) ziet dyscalculie vooral als een probleem van automatisering van 'rekenfeiten', en problemen bij

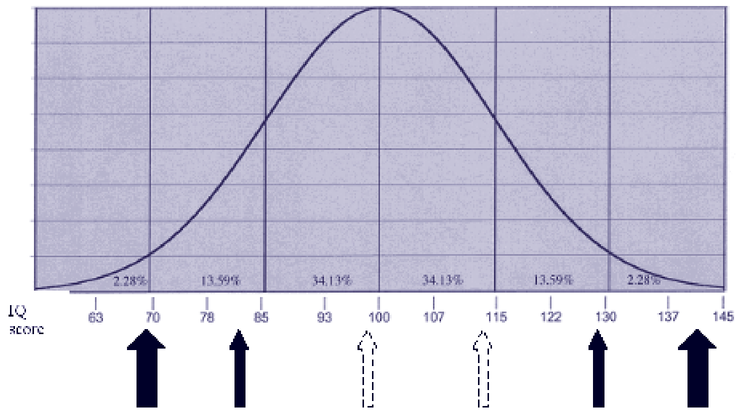


Ankie koopt 2 van deze pakjes.
Hoeveel lollies zijn dat samen?



Hoeveel potloden samen?
______ × ______ potloden = ______ potloden

FIGUUR 1



FIGUUR 2 Normaalverdeling intelligentie

het vlot en correct uitvoeren van de procedures (voor tellen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, enzovoort). Om het automatiseringsprobleem aan te kunnen pakken, moet de stof, volgens Braams (zie [3]), wél 'geheel begrepen' zijn. Dyscalculie is volgens hem (en Ruijssenaars) echter geen kwestie van onvoldoende inzicht, volgens Desoete weer wél. Van Luit benadrukte (in een persoonlijk gesprek) dat er een verband is tussen dyscalculie en problemen met het langetermijngeheugen op een 'specifiek kennisdomein'.

2. In een gesprek over dyscalculie met het team van de Psychologische Adviespraktijk Begaafden Utrecht (PABU) kwam als hun standpunt naar voren dat ze van dyscalculie spreken wanneer ernstige rekenproblemen na uitvoerige behandeling hardnekkig *blijven* voortbestaan. Dyscalculie is volgens deze opvatting een moeilijk te corrigeren stoornis, al hangt dit natuurlijk ook af van de aard en ernst van het probleem (vergelijk Van Gelders acalculie).

3. Een derde opvatting (naar voren komend in een persoonlijk gesprek met Gravemeijer) luidt dat een deel van de leerlingen altijd moeite zal hebben met rekenen-wiskunde vanwege de spreiding in prestaties die zich nu eenmaal altijd op alle gebieden voordoet. Zolang er geen aantoonbaar verband gevonden is tussen hersenfuncties en rekenproblemen wordt er de voorkeur aan gegeven de term dyscalculie te vermijden. Naar analogie van dyslexie, dat als een probleem *binnen* het taalgebied wordt gezien, wil Gravemeijer alleen van dyscalculie spreken als zich *binnen* het rekengebied een ernstige uitval voordoet.

4. Alleen rekenproblemen die zich bij leerlingen met een goed ontwikkelde intelligentie voordoen, zodanig dat er sprake is van een grote *discrepantie* met prestaties op de andere kennisdomeinen, worden als dyscalculie getypeerd. Indien deze het gevolg zijn van een hersenstoornis (of anderszins) zal *didactische* behandeling niet succesvol zijn (vergelijk van Gelders acalculie). Indien emotionele of persoonlijkheidsproblemen een rol spelen, is behandeling mogelijk. Bij leerlingen die over de *hele* linie zwak presteren is er geen grote discrepantie met prestaties op andere leergebieden en is er sprake van *rekenproblemen* (vergelijk van Gelders dyscalculie).

Het vierde en laatste standpunt wordt in dit artikel bepleit, uitgewerkt en toegelicht.

Dyscalculie en intelligentie

In figuur 2 zien we de verdeling van de intelligentie van een hele bevolking.
Uitgaande van de vierde opvatting komt dyscalculie uitsluitend rechts in de verdeling voor. Van dyscalculie wordt *niet* gesproken bij kinderen die over de *hele linie* zwak tot zeer zwak presteren vanwege een lager potentieel. Het heeft weinig zin om bij een kind met bijvoorbeeld het syndroom van Down dat zich de telrij tot tien nauwelijks heeft kunnen eigen maken, van dyscalculie te spreken, net zo min als het zin heeft te constateren dat het geen mooi verhaal kan schrijven, Chopin niet kan vertolken of niet kan schaken. De verstandelijke vermogens zijn nu eenmaal over de hele linie ontoereikend (het is allemaal 'dys', om het zo maar eens te zeggen). Met figuur 2 is niet gesuggereerd dat rekenproblemen direct en uitsluitend veroorzaakt worden door intelligentietekorten. Wel is het zo dat leerlingen met een hoger ontwikkelde intelligentie doorgaans beter *presteren*. Indien ze echter laag presteren op het gebied van rekenen-wiskunde en op de andere gebieden hoog, is er sprake van een

opmerkelijke discrepantie, die om nadere analyse vraagt.
In figuur 2 zien we rond het gemiddelde (IQ van 100), de grootste groep mensen (leerlingen), 70% van de (school)bevolking heeft een IQ tussen 85 en 115. De leerlingen die in deze groep *links* van het gemiddelde zitten zijn leerlingen die over het algemeen vrij matig presteren. Op het gebied van rekenen-wiskunde zijn ze niet sterk en is er vaak extra aandacht nodig (zie de linker stippelpijl in figuur 2). De leerlingen die in deze groep *rechts* van het gemiddelde zitten, zijn weinig opvallende leerlingen die normaal maar zelden bovenmatig presteren. Op het gebied van rekenen-wiskunde blinken ze niet uit, maar grote problemen doen zich niet vaak voor (zie rechter stippelpijl). Als leerlingen in deze groep problemen met rekenen-wiskunde hebben, is het zeer de vraag of er dan sprake is van dyscalculie. Grote *discrepantie* met prestaties op andere gebieden dan rekenen-wiskunde doet zich immers weinig voor omdat de prestaties op alle gebieden matig of gemiddeld zijn.
Bovendien is er nog het volgende punt van aandacht: er zijn op alle mogelijke gebieden (soms grote) verschillen tussen leerlingen. Op gebied van muziek, taal, sport, tekenen enzovoort en dus ook op het gebied van rekenen-wiskunde. Als leerlingen op een bepaald gebied zwak presteren, is er toch niet meteen sprake van dyscalculie?
Uit onderzoek van het CITO is bekend dat allochtone leerlingen een aanzienlijke achterstand op het gebied van rekenen-wiskunde hebben. Ook bij meisjes is dat het geval, zo blijkt uit onderzoek van Vermeer (1997). We kunnen daaruit echter niet concluderen dat allochtone leerlingen en meisjes meer aanleg hebben voor dyscalculie. Uit recent onderzoek van Van den Boer (zie [2]) is heel iets anders gebleken, namelijk dat problemen van allochtone leerlingen in het Voortgezet Onderwijs vooral het gevolg zijn van miscommunicatie tussen leerlingen en leraar én van misinterpretatie door de leerlingen van wiskundige opdrachten. Ze begrijpen de context en vraagstelling verkeerd. Van Eerde (zie [6]) ontdekte dat in de analyse van het denken van (allochtone) leerlingen aanknopingspunten gevonden kunnen worden voor remediëring.
Trouwens, als iemand niet zo goed is in de Duitse taal dan spreken we toch ook niet meteen van 'dysgermanie'?

Twee groepen leerlingen

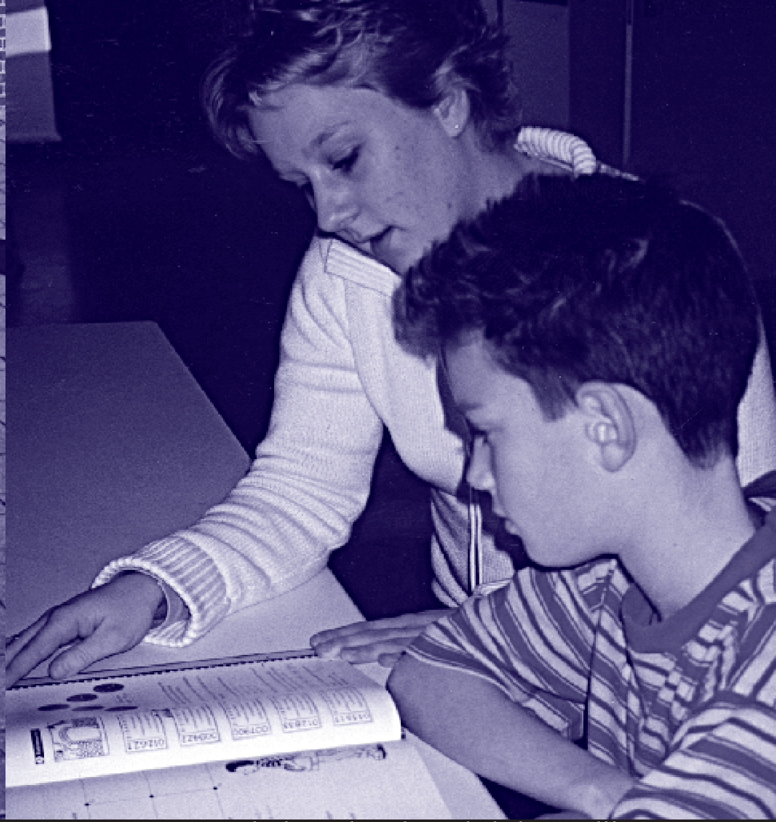
Uit ervaring is bekend dat er in elke klas leerlingen voorkomen die over de hele linie (op meerdere gebieden) zwak tot slecht presteren. Dat zijn in principe de leerlingen met een IQ lager dan 85, *links* in de normaalverdeling. Met de vette pijl links zijn de leerlingen gelokaliseerd die ernstige problemen hebben en met een dunne pijl de leerlingen die minder ernstige problemen ondervinden. Dat is samen ruim 16% van de populatie. Dat zijn dus allemaal leerlingen die op meerdere vakgebieden met moeite het onderwijs kunnen volgen en die *óók* op het gebied van het rekenen *zwak* zijn.
We hebben dus met twee verschillende groepen kinderen te maken. Tot de ene groep behoren de leerlingen die over de hele linie zwak tot slecht presteren en dus *óók* op het gebied van rekenen-wiskunde (IQ lager dan 85). De andere groep bestaat uit leerlingen die *alléén* op het gebied van het rekenen extra hulp nodig hebben. Volgens Desoete betreft dat 6 à 7% van de leerlingen in het basisonderwijs. Dat zouden dus ruim 100.000 basisschoolleerlingen zijn.
Deze laatste groep leerlingen is *rechts* in de normaalverdeling te vinden; hun IQ ligt boven de 115 en het betreft ruim 16% van de (school)bevolking. Bij déze leerlingen zou sprake kunnen zijn van dyscalculie indien er sprake is van grote discrepantie in prestaties op het gebied van rekenen-wiskunde en andere gebieden. Naarmate deze leerlingen *meer naar rechts in de verdeling* worden aangetroffen (dus naarmate ze op andere terreinen beter presteren en intelligenter zijn), wordt het fenomeen steeds boeiender. Hoe is het immers mogelijk dat iemand die intelligent is - problemen oplost, analyseert, reflecteert, formaliseert - toch slecht is in rekenen-wiskunde, terwijl in dat vak juist *deze* vaardigheden zo'n centrale rol spelen?
Samenvattend: in figuur 2 is *rechts van het gemiddelde* met een stippelpijl het gebied aangegeven waarin zich dyscalculie kán voordoen, maar zoals gezegd is het moeilijk uit te maken of hier wel sprake is van dyscalculie omdat zich doorgaans geen grote discrepantie voordoet met prestaties op andere vakgebieden. Met een dunne pijl, *rechts van het gemiddelde,* is het gebied aangegeven (IQ tussen 115 en 130) waar zich serieuze gevallen van dyscalculie kunnen voordoen. Met een vette pijl is het gebied getraceerd waar zich leerlingen kunnen bevinden met een ernstige uitval op het gebied van rekenen-wiskunde die echter in andere vakken hoog presteren en die heel intelligent zijn. Dit zijn intrigerende gevallen van dyscalculie.

Diagnose en remediëring

Zoals gezegd wordt de term 'rekenprobleem' (rekenstoornis) met name in de orthopedagogische literatuur steeds vaker ten onrechte vervangen door de term 'dyscalculie'. Als dyscalculie echter wezenlijk iets anders is dan een rekenprobleem, dan zou dat zichtbaar moeten zijn in de *diagnose* en in de *hulp* die voor leerlingen met dyscalculie (volgens de eerst besproken opvatting in de tweede paragraaf) geschikt geacht wordt.
De problemen van kinderen met dyscalculie worden in de (orthopedagogische) literatuur doorgaans als volgt getypeerd. De kleuters met dyscalculie hebben moeite met tellen, vooral met synchroon tellen, en ze blijven maar op de vingers tellen. Leerlingen met dyscalculie zijn erg traag, het vlot en geautomatiseerd rekenen komt niet op gang, ze hebben geheugenproblemen en vergeten steeds wat



FIGUUR 3 Er zijn nu eenmaal verschillen tussen leerlingen. Ieder heeft zijn eigen sterke punten.



FIGUUR 4 Het voordeel van de oplevende belangstelling voor dyscalculie is, dat er weer veel aandacht is voor kinderen met rekenproblemen.

ze alsmaar oefenden. Ze voeren geleerde procedures verkeerd uit of verwarren procedures met elkaar, ze lijden aan aandachtsstoornissen, ze keren de cijfers in een getal om (ze schrijven 21 in plaats van 12), ze wisselen cijfers binnen rekenprocedures om (13 – 6 = 13, want 6 – 3 = 3 en 10 + 3 = 13), ze voeren geen controle uit op hun werkwijze noch op de uitkomst (metacognitie genoemd) en een (groot) deel van de kinderen heeft ook nog last van problemen op andere vakgebieden, zoals lezen, taal en muziek. Er is een relatie tussen dyscalculie en dyslexie, zegt Ruijssenaars (2003).
Wat opvalt is dat deze analyse van de problemen van kinderen die volgens de auteurs aan *dyscalculie* lijden *niet* verschilt van de typering van de rekenproblemen van *zwakke leerlingen*, zoals bekend uit vakdidactisch onderzoek (zie bijvoorbeeld [6] en [14]).
Ook de voorgestelde *hulp* aan kinderen met dyscalculie verschilt nauwelijks van de hulp die in vakdidactisch onderzoek doorgaans wordt geadviseerd, althans wat de *inhoud* betreft. Ten aanzien van de *didactiek* wordt echter soms sterker accent gelegd op een meer ‘structurerende’ aanpak dan in de vakdidactiek gebeurt. Een selectie uit de suggesties voor hulp luidt als volgt: gebruik van concreet materiaal, niet meerdere strategieën tegelijk aanbieden, het werkgeheugen minimaal belasten (door bijvoorbeeld met tafelkaarten te laten werken), extra aanmoedigen, veel structuur bieden en hints geven (Desoete). Verder wordt erop gewezen kleine stapjes te laten zien, te visualiseren, het kind hardop te laten denken, gericht uitleg te geven en het kind spelletjes met dobbelstenen of Rummikub te laten doen.

De conclusie moet luiden dat een specifieke theorie over dyscalculie nauwelijks is terug te vinden in de analyse van problemen en de suggesties voor remediëring. De meeste suggesties zijn al bekend uit vakdidactisch onderzoek en onderzoek van het Cito. Daarmee is niets gezegd over de kwaliteit van de suggesties voor hulp en remediëring. Onder andere ‘De rekenhulp voor kleuters’ van Van Luit bevat bijvoorbeeld adequate suggesties zoals gebruik leren maken van telstrategieën, vertrouwd raken met dubbelstructuur en vijfstructuur, problemen leren aanpakken, enzovoort.

Oorzaken van dyscalculie

Er zijn kinderen en volwassenen die ondanks een goed ontwikkelde intelligentie rekenproblemen ondervinden. De neuropsychologen Butterworth en Dehaene hebben over een aantal van deze (soms zeer eigenaardige) gevallen gepubliceerd. Butterworth analyseerde bijvoorbeeld het rekenen van de ‘acalculic’ Strozzi. Deze Strozzi, een zakenman, was niet in staat twee getallen bij elkaar op te tellen, zelfs 1 + 1 niet. Wel kon hij de telrij tot 20 opzeggen en hij wist bijvoorbeeld dat de 6 na de 5 kwam, hij kon echter de som 5 + 1 niet uitrekenen. Dehaene vertelt over een patiënt die getroffen werd door een hersenbeschadiging. Hij kon daarna weliswaar getallen lezen en schrijven, maar hij wist niet (meer) welk getal tussen 2 en 4 voorkwam. Hij kon wel precies vertellen welke maand tussen februari en april voorkwam of welke dag voorafging aan woensdag. Dyscalculie veroorzaakt door een neurologische of psychiatrische aandoening komt zo zelden voor dat we eerder aan promillen van de (school)bevolking moeten denken dan aan procenten. Het is *theoretisch* overigens denkbaar dat ook bij kinderen met een lagere intelligentie zulke aandoeningen een rol spelen, maar in die gevallen is er meestal toch geen

sprake van een grote *discrepantie* tussen prestaties op het gebied van reken-wiskunde en andere gebieden. Die discrepantie wordt in dit artikel juist als kenmerkend voor dyscalculie beschouwd.
Er zijn echter nog ándere factoren (dan Butterworth en Dehaene onderzochten) die verband houden met het ontstaan van dyscalculie. Als we die meetellen, zitten we met die promillen wellicht aan de krappe kant.

Uitgaande van de in dit artikel bepleite criteria (normaal tot hoog intelligent en toch uitval bij rekenen-wiskunde) zijn er inderdaad nóg een aantal factoren aanwijsbaar die mogelijk het ontstaan van dyscalculie beïnvloeden.
Dat zijn ten eerste ernstige *emotionele* problemen. Deze kunnen leiden tot ontmoediging en een negatief zelfbeeld met name met betrekking tot de exacte vakken. En een negatief zelfbeeld leidt weer tot tegenvallende prestaties. Deze leerlingen schrijven hun problemen toe aan hun gebrekkige capaciteit. Dat komt voor bij jongens en meisjes, maar bij met name allochtone meisjes wordt dit versterkt door een cultuur-etnisch probleem. Exacte vakken worden voor vrouwen als onbelangrijk beschouwd (dat komt overigens ook bij autochtone vrouwen voor) en de stimulans om te presteren, ontbreekt.
Ten tweede kan de *motivatie* voor het leren van rekenen-wiskunde onherstelbaar zijn aangetast. Zo vertelde een Pabo-studente eens dat ze letterlijk vlekken voor haar ogen kreeg als ze al vermoedde dat er gerekend moest worden. Zij kon en wilde absoluut niet (meer) rekenen, de motivatie was door angst en gebrek aan zelfvertrouwen ernstig aangetast.
Ten derde kan een *eenzijdige, sterk mechanistische didactiek* de oorzaak zijn van dyscalculie. Er is hier sprake van ernstige *'didactische verwaarlozing'*.
Sommige volwassenen hebben een heel eigen werkwijze bij het rekenen ontwikkeld. Slechts enkelen durven dat toe te geven. Zo vertelde een lerares uit het speciaal onderwijs onlangs dat ze alleen in kleuren kon rekenen. Bijvoorbeeld: rood groen = geel. De kleuren associeerde ze met aantallen en zo verkreeg ze een uitkomst. Zo'n systeem is echter slechts beperkt toepasbaar en boven de 20 was ze dan ook hulpeloos. Dit voorbeeld laat zien hoe iemand met 'gezond verstand' toch kan vastlopen in het rekenen. Het is niet onwaarschijnlijk dat deze lerares ooit zelf rekenen heeft geleerd op basis van het zogenoemde Cuisenaire systeem, een systeem dat de kinderen leert rekenen door gekleurde staafje te associëren met aantallen.
Als mogelijk vierde oorzaak van dyscalculie wordt in de literatuur een 'mogelijk erfelijke stoornis' genoemd (Braams, 2000). Of 'een aangeboren of vroeg verworven storing', veroorzaakt door een 'dominant gen' (Desoete, 2003). De Vos (2003) meent: 'Sommige vormen van dyscalculie lijken erfelijk te zijn', en ook Ruijssenaars (2003) ziet een erfelijke oorzaak. Kortom, dyscalculie kan volgens deze auteurs mogelijk veroorzaakt worden door *genetische factoren*. Met zulke uitspraken moet men echter voorzichtig zijn. Uiteraard berust ons bestaan als mens geheel op onze genen, want die bepalen onze mogelijkheden en op individueel niveau bepalen ze het potentieel. Maar onze vermogens komen tot ontwikkeling, zegt de neurofysioloog Blakemore, door structuren die door eiwitten worden gereguleerd. De genen produceren die eiwitten.
Genen produceren dus geen *gedrag* (zoals het uitvoeren van de vermenigvuldigprocedure of het oplossen van reken-wiskundige problemen), genen produceren *eiwitten*. Daarom zegt Blakemore: 'Genen willen niets en genen weten niets.' Een bepaald gen bevat slechts de code voor een eiwit dat een bepaald gedrag aanstuurt. Het uiteindelijke gedrag komt (na een keten van complexe neurofysiologische processen te hebben doorlopen) tot stand op basis van veel meer dan de genetische informatie, namelijk *ervaringen* (zie ook Ridley 2003).
Dit is een nogal technisch verhaal, maar het is nodig om de relatie die tussen dyscalculie en genetisch bepaalde stoornissen wordt gelegd met de nodige terughoudendheid te kunnen beoordelen.
Maar stel nou eens dat er onverwachts een 'getallen-gen' opgespoord zou worden, en stel voorts dat we kunnen constateren dat dit gen bij een bepaalde leerling een rekenstoornis veroorzaakt, wat voor remedie zou dan met het oog op die stoornis, didactisch gezien, passend zijn? Wie het weet, mag het zeggen.

Hoe verder?

In het geval dat de diagnose van een kind met rekenproblemen in de richting van dyscalculie wijst (volgens de opvatting zoals in dit artikel bepleit), *wát* valt er dan te doen? De vraag of een neurologische of psychiatrische aandoening of een hersenbeschadiging zódanig reparabel is dat de *leerprocessen* op het gebied van reken-wiskunde substantieel verbeterd kunnen worden, is moeilijk te beantwoorden. Zoals we zagen, meent Van Gelder dat er in zo'n geval sprake is van een onherstelbare uitval ('acalculie'). Het lijkt verstandig daar de ter zake deskundigen, zoals neurologen, over te laten oordelen.
Dat ligt anders als we het over leerlingen hebben met (ernstige) emotionele, motivatie- of persoonlijkhei dsproblemen (zoals een negatief zelfbeeld). Onder deskundige leiding en met geduld en begrip zullen zeker passende remediërende maatregelen kunnen worden genomen, zowel van psychologische als van vakdidactische aard.
Ook wanneer leerlingen didactisch zijn verwaarloosd, zal adequate hulp mogelijk zijn. Tenminste, als die hulp niet te laat komt omdat de (omslachtige en onwenselijke) procedures al te diep zijn ingeslepen.
Wanneer het echter gaat om hulp aan leerlingen die over de *hele linie* zwak zijn, en in die gevallen is er volgens de in dit artikel bepleite opvatting doorgaans géén sprake van dyscalculie, kan geput worden uit de ervaring die al gedurende vele jaren is opgedaan. Extra stimulans is wenselijk en kan op individueel niveau redelijk effectief zijn. Er kan



FIGUUR 5 Sinds een aantal jaren worden rekenproblemen steeds vaker als dyscalculie getypeerd.

echter een fase aanbreken dat beoordeeld moet worden wat het *haalbare niveau* van een *individuele* leerling is, gezien de reeds bestede hulp en het effect van die hulp. Uiteindelijk kan het wenselijk zijn te differentiëren zowel naar leertraject, tempo en het na te streven niveau.

Tot besluit

De recent oplevende aandacht voor dyscalculie heeft als voordeel dat er extra energie wordt gestoken in de problematiek van leerlingen met problemen op het gebied van reken-wiskunde. Een punt van zorg kan echter zijn dat leerlingen gestigmatiseerd worden indien de indruk wordt gewekt dat dyscalculie direct wijst op een 'genetisch defect' of 'iets raars in de hersenen' waaraan je als leerkracht nou eenmaal niets kunt doen. Of er aan rekenproblemen iets gedaan kan worden, kan alleen worden vastgesteld na evaluatie van een *intensief* uitgevoerde behandeling.

Met toestemming overgenomen

Het bovenstaande is een ingekorte versie van een artikel dat eerder verscheen in *Willem Bartjens*, tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, jaargang 23, nr. 3 (januari 2004).

Literatuur

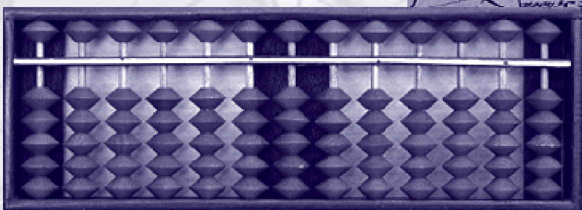
[1] C. Blakemore: Genen weten niks en doen niks. In: Wetenschapsbijlage van NRC Handelsblad, 20-7-2003.
[2] C. van den Boer: Als je begrijpt wat ik bedoel. Freudenthal Instituut (dissertatie), Universiteit Utrecht (2003).
[3] T. Braams: Dyscalculie. In: Tijdschrift voor remedial teaching, nr.4 (2000), pp. 6-11.
[4] B. Butterworth: The mathematical brain. London: Papermac (1999).
[5] S. Dehaene: What are numbers really? A cerebral basis for number sense (1999); www.edge.org/3rd_culture/dehaene/dehaene_p2.html.
[6] H.A.A. van Eerde: Kwantiwijzer. Tilburg: Uitgeverij Zwijsen (1996).
[7] L. van Gelder: Acalculie en dyscalculie. In: Paedagogische Studiën, jrg. 29 (1952), pp. 176-188.
[8] H. van Luit: Jonge kinderen en dyscalculie. In: Jeugd, School en Wereld, jrg. 87, nr.7 (2003), pp. 6-10.
[9] A. Noteboom, F. van der Schoot, J. Janssen, N. Veldhuijzen: Balans van het rekenwiskundeonderwijs halverwege de basisschool 3. Arnhem: CITO (1997).
[10] M. Ridley: Nature via nurture: Genes, Experience, and What Makes us Human? HarperCollins (2003).
[11] A.J.J.M. Ruijssenaars: Rekenproblemen / Theorie, diagnostiek, behandeling. Rotterdam: Lemniscaat (1997).
[12] A.J.J.M. Ruijssenaars, P. Ghesquière (red.): Dyslexie en dyscalculie. Leusden, Leuven: Acco (2002).
[13] A.J.J.M. Ruijssenaars: Veelgestelde vragen over rekenproblemen en dyscalculie. In: Balans, januarinummer (2003), pp. 28-31.
[14] A. Treffers: Dyscalculie (2002); www.fi.uu.nl/rekenweb/leraren/welcome.html.
[15] T. de Vos: Dyscalculie (2003); www.opvoedadvies.nl/dyscalculie.htm.

Foto's

Jasper Oostlander

Over de auteur

Jo Nelissen (e-mailadres: J.Nelissen@fi.uu.nl) is medewerker aan het Freudenthal Instituut. Zijn expertise betreft onder meer leer- en



FIGUUR 1 Japanse Soroban Abacus



FIGUUR 2 Proportionaalpasser met steekpasser

REKENINSTRUMENTEN IN MAATSCHAPPIJ EN SCHOOL

[Otto van Poelje en Simon van der Salm]

Wiskunde- en rekenonderwijs sinds de 17e eeuw

Al duizenden jaren gebruikt men rekeninstrumenten en beoefent men wiskunde.
Het kennisniveau van een hedendaagse, wiskundig begaafde middelbare scholier is ongetwijfeld veel hoger dan dat van een 17e-eeuwse hoogleraar in de wiskunde.
En wat deze professor naast wiskunde nog te vertellen had - in het Latijn uiteraard - over astrologie en mystieke of kabbalistische onderwerpen, past zeker niet meer in het hedendaagse curriculum.
Wiskundigen sinds de 17e eeuw, waaronder Descartes, Newton, Leibniz, Euler, de Bernoulli's en Laplace, hadden er geen idee van dat hun wiskunde in het onderwijs voor tieners zou worden opgenomen. Deze mathematici zouden stomverbaasd toekijken hoe scholieren een sinus kunnen berekenen, simpelweg door het indrukken van een paar knopjes op een apparaatje dat die genieën helemaal niet als rekenmachine zouden herkennen.
En de laatste decennia is het curriculum van de middelbare school zelfs nog uitgebreid met kansrekening en statistiek, lineair programmeren en dynamische modellen. In de 60er jaren kwam die leerstof pas na de propedeuse van de toenmalige Technische Hogeschool aan de orde. Nu komt het al op het bordje van tieners terecht.

We kunnen de 17e eeuw beschouwen als het startpunt van moderne rekenmachines. Rekenapparatuur werd meestal direct na uitvinding enthousiast in gebruik genomen door astronomen, landmeetkundigen en kooplieden. Opmerkelijk is het dat men pas sinds kort rekenmachines in het middelbaar onderwijs accepteert. Rekenmachines zijn zelfs onmisbaar geworden in het huidige wiskunde- en rekenonderwijs.
Door de publicaties van Simon Stevin, Bartjens en vele anderen is het rekenonderwijs zo verbeterd, dat in Nederland iedere leerling halverwege het basisonderwijs de basale rekenkundige functies kan uitvoeren. In de vroege 17e eeuw werd dit niveau van rekenen slechts door een handjevol specialisten bereikt.

De vroegste rekenmachines

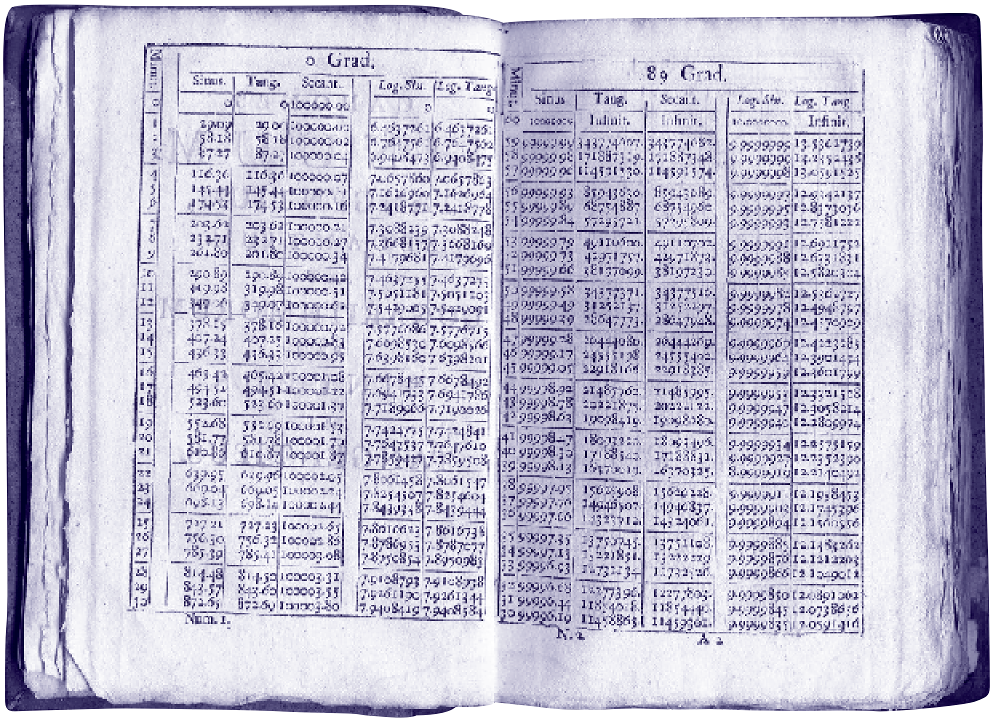
De allereerste vormen lijken in onze moderne ogen niet erg machinaal. Het waren *knikkers* in het zand of *rekenpenningen* op een tableau, die door hun numerieke waarde en specifieke positie gebruikt konden worden voor optellen en aftrekken van getallen in het gangbare talstelsel.
Men rekende vaak in talstelsels met een basis die nauw gekoppeld was aan de diverse waarden van de gebruikte munten en gewichten. Vóór de 17e eeuw werd het decimale stelsel nauwelijks gebruikt.
Als telkralen ingebed worden in een frame, ontstaat de *abacus*, die meer herkenbaar is als rekenmachine. De vroegste telramen, uit de Griekse, Romeinse en Aziatische culturen tot aan de Middeleeuwen, zijn slechts bekend als zeldzame museumobjecten of uit beschrijvingen in oude manuscripten.
Tot de dag van vandaag gebruikt men nog steeds de abacus: in China de *Suan-Pan*, in Japan de *Soroban* (zie figuur 1) en in delen van de voormalige Sovjet-Unie de *Stschoty*. Deze telramen zijn in eerste instantie ontwikkeld voor decimaal optellen en aftrekken, maar een geoefende gebruiker kan er ook mee vermenigvuldigen en delen. En zelfs worteltrekken is met een abacus niet erg moeilijk. Tienjarigen in China en Japan kunnen met de abacus zelfs aanzienlijk sneller rekenen dan kinderen in de westerse wereld, met hun moderne elektronica. Beroemd is het verhaal dat in 1946 een wedstrijd in de vier basis rekenfuncties gehouden werd met een elektrische rekenmachine en een Soroban, waarbij de Japanner met zijn abacus van een halve dollar vier van de vijf onderdelen won.

Algoritmen en rekeninstrumenten

Terwijl de abacus duidelijk een mechanische rekenmachine is, werd gedurende de Middeleeuwen in Europa een handmatige methode van cijferen verder ontwikkeld: het rekenen met Arabische cijfers, met pen en papier. Het rekenen met pen en papier kan men echter ook opvatten als een *abstracte machine*. Die machine bestaat uit papier, pen en een stel regels, ook wel *algoritme* genoemd, waarmee een opgave op papier wordt opgelost. Een algoritme is een opeenvolging van rekenregels die, als ze blindelings worden gevolgd, automatisch het resultaat van een berekening opleveren. Algoritmen komen niet alleen voor bij het rekenen met pen en papier, maar bij elk rekenhulpmiddel, of het nu gaat om de opeenvolgende handelingen die met de kralen van een abacus worden uitgevoerd, de volgorde van de diverse toetsen op een calculator of het bewerken van afgelezen waarden uit een logaritmetabel.
Elk hulpmiddel waarmee we rekenalgoritmen kunnen uitvoeren, zullen we hier een *rekeninstrument* noemen. Met deze nieuwe definitie van het begrip rekeninstrument in bredere zin vinden we nog andere, soms onverwachte, voorbeelden van rekeninstrumenten:
- de *steekpasser*, die rond onze Gouden Eeuw (en veel later ook nog) gebruikt werd bij het rekenen op de *proportionaalpasser* van Galileo Galilei (zie figuur 2), en de *logaritmische schaal* van Edmund Gunter;
- de *niet-logaritmische rekenboeken*, zoals bijvoorbeeld de *Calculateur Universel* (Algemeen Rekenwerk) van Jean Bergmann, begin 20e eeuw, met regels en tabellen voor vermenigvuldigingen en delingen met getallen tot zes cijfers;
- de *numerieke algoritmen* voor een programmeerbare computer, bijvoorbeeld *stroomdiagrammen* en *Fortran-code* voor de nulpuntsbepaling van een functie volgens Newton-Raphson.

Rekenlinialen

Zie ook de bronnen [1] en [2].
In 1614 publiceerde Napier zijn standaardwerk over de logaritme, niet als inverse functie voor

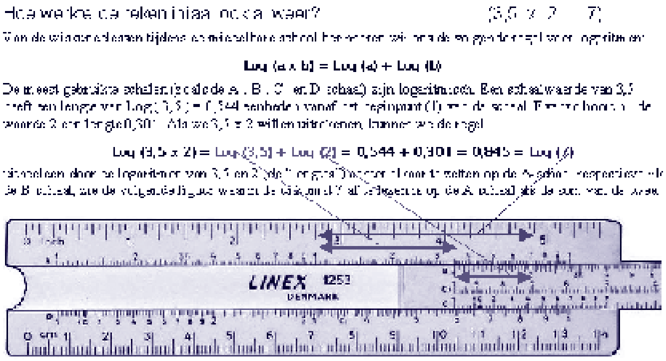


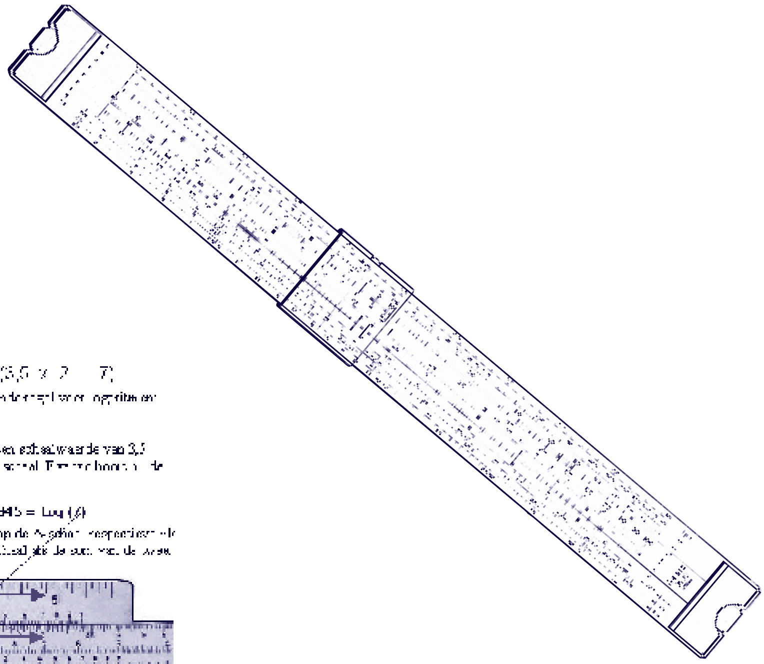
FIGUUR 3 18e-eeuwse logaritmentabel

exponentiële functies, zoals we tegenwoordig de logaritme interpreteren, maar als methode voor het versneld kunnen uitvoeren van vermenigvuldigingen via de regel log(ab) = log(a) + log (b).
Daartoe berekende hij de eerste *logaritmetabel*; zie figuur 3. Aan zo'n tafel bestond grote behoefte bij rekenintensieve toepassingen als de astronomie en de navigatie op zee. Laplace moet - bijna 200 jaar later - hebben gezegd: 'Het verkorten van het rekenwerk door de logaritme heeft het leven van de astronoom verlengd.'
Nog geen tien jaar na Napiers publicatie ontstonden de eerste ideeën voor logaritmische rekeninstrumenten. In 1624 beschreef Edmund Gunter een vaste liniaal met *logaritmische schalen*, die in combinatie met een *steekpasser* werd gebruikt. Rond 1632 ontwierp William Oughtred de bekende rekenliniaal en rekenschijf, die bestaan uit logaritmische schalen die ten opzichte van elkaar kunnen worden verschoven of gedraaid.
Na succesvolle invoering van de gespecialiseerde rekenliniaal in vakgebieden als zeenavigatie, militaire en civiele techniek en belastingheffing op alcohol, ontwikkelden wiskundigen en ingenieurs vanaf 1775 diverse soorten algemene rekenlinialen. Bekende types zijn de *SOHO-liniaal* van James Watt (1775), de liniaal met de schalenconfiguratie en de loper van *Mannheim* (1850), de liniaal met het meest toegepaste systeem, de *Rietz* (1902) en de *Darmstadt-liniaal* (1935). Zie figuur 4 voor een veelgebruikte schoolliniaal uit de 70-er jaren.
Circa 1850 begonnen de hoogtijdagen van de rekenliniaal, die men industrieel ging produceren met grote nauwkeurigheid en in vele soorten en maten. De vroege materialen zoals massief hout, ivoor en metaal, verving men langzamerhand door laminaten van hout en celluloid of kunststof, en vanaf 1935 door pure plastics. Naast de meest voorkomende lineaire vorm, ontwierpen instrumentmakers, en later fabrikanten, steeds ingenieuzere rekenschijven en -cilinders, omdat daarmee langere schalen in spiraalvorm of als evenwijdige deelschalen kunnen worden gebruikt waardoor een grotere precisie mogelijk wordt.
De meest uitgebreide linialen hebben meer dan 30 schalen, verdeeld over de twee kanten van de schuif en het lichaam in een zogenaamde *Duplex-constructie*. Naast vermenigvuldigen en delen, kan men met deze linialen worteltrekken, kwadrateren en kuberen, maar ook e-machten en algemene machten berekenen via dubbellogaritmische schalen, en bovendien rekenen met goniometrische en hyperbolische functies.
Diverse hulpschalen, zoals *inverse en verschoven schalen*, maken het mogelijk samengestelde berekeningen zoveel mogelijk aansluitend te laten verlopen. Het was voor een geoefende gebruiker een uitdaging om een berekening van een complexe formule met een minimaal aantal schuifoperaties zo snel mogelijk uit te voeren.
Fabrikanten van rekenlinialen ontwierpen, naast de algemene rekenliniaal, honderden gespecialiseerde rekenlinialen voor toepassingen in de meest uiteenlopende vakgebieden, van berekeningen voor betonsterkte, rioolbuis-dimensionering of elektrotechnische calculaties tot zelfs statistische toetsen.

Mechanische rekenmachines

Zie ook de bronnen [3] en [6].
Terwijl Napier aan het concept van de logaritme





FIGUUR 4a

FIGUUR 4b Aristo 0903 schoolliniaal

werkte, vond hij nog een ander hulpmiddel uit voor het uitvoeren van vermenigvuldigingen, de *Napier-staafjes* (zie [5]). Met die staafjes wordt het 'pen-en-papier'-algoritme voor een productberekening aanzienlijk vereenvoudigd.
In 1623 paste Wilhelm Schickard de Napier-staafjes toe in een *draai- en schuifconstructie* voor berekeningen met getallen tot zes cijfers. Het bijzondere aan zijn apparaat was dat de laatste stap van de staafjesprocedure, namelijk de optelling van de zescijferige deelproducten, geautomatiseerd werd in een houten tandwielkast met 10-overloop. Dit was de eerste rekenmachine met mechanische optelling, die nog maar sinds midden 20e eeuw bekend is. Sindsdien bouwden enthousiaste wiskundigen een aantal replica's.

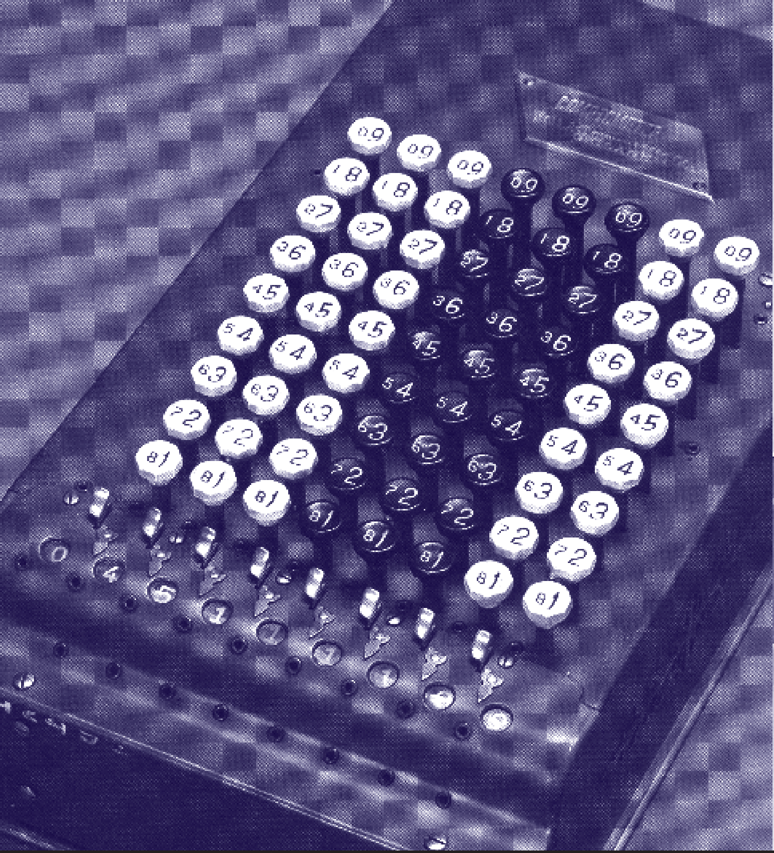
Ook Blaise Pascal heeft in 1642 een mechanische opteller ontworpen en laten bouwen, de *Pascaline*. Deze kon getallen tot 10 cijfers verwerken, waarvan sommige niet-decimaal vanwege het Franse muntstelsel waarvoor de rekenmachine bedoeld was. Onder de pure optellers nam de *Comptometer* van Felt (eind 19e eeuw) een aparte plaats in (zie figuur 5). Op een tweedimensionaal ($n \times 10$)-toetsenbord konden getallen tot n cijfers *direct* worden opgeteld door alleen de diverse cijfertoetsen in te drukken. Een functietoets was niet nodig, want optelling was de enige operatie.

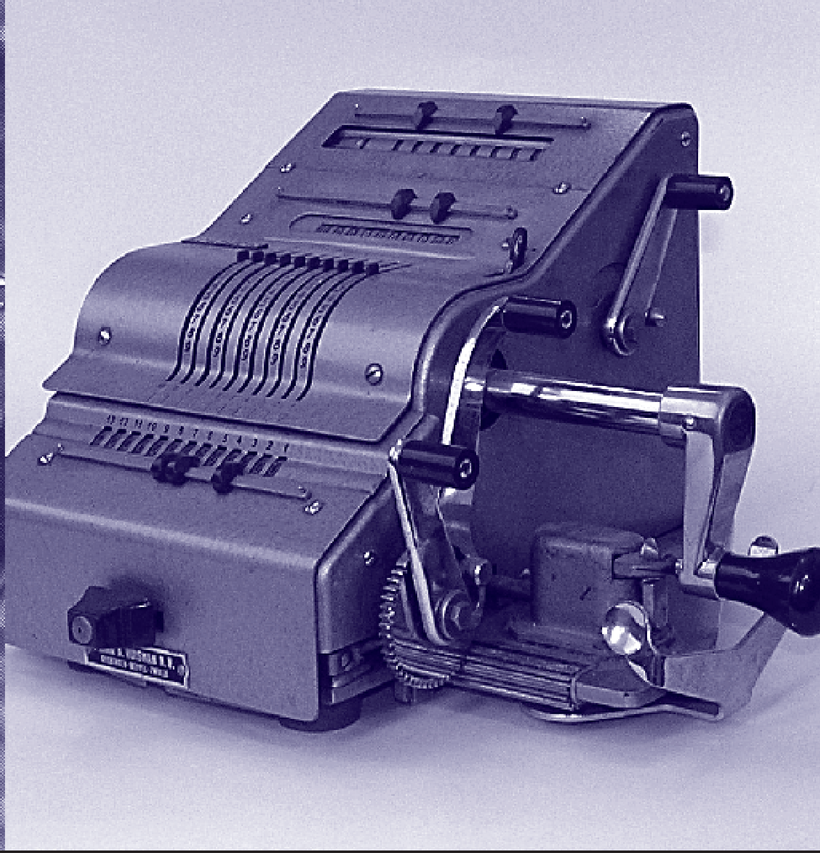
Elke opteller kan uiteindelijk ook vermenigvuldigen door repetitie. Leibniz ontwierp in 1672 een mechanisme voor repeterend optellen, met de *Pascaline* als uitgangspunt. Uiteindelijk resulteerde het mechanisme van Leibniz in de zogenaamde *staffelwalsvermenigvuldiger*. Slimme instrumentmakers ontwikkelden vele varianten van dit principe, bijvoorbeeld Hahn, die de ronde vorm bedacht, en Thomas de Colmar die de *Arithmometer* ontwierp.

Eind 19e eeuw vonden Odhner in Europa en Baldwin in de USA een volledig nieuwe techniek uit voor herhaald optellen. Hun rekenmachines maakten gebruik van schijven, die van pennen waren voorzien. Men spreekt in het Engels van *pinwheels* en in het Duits van *Sprossenräder*. Vele fabrikanten produceerden dergelijke rekenmachines, die wel op een handnaaimachine met draaislinger lijken (zie figuur 6). Men gebruikte die rekeninstrumenten nog tot eind 60'er jaren, bijvoorbeeld voor valutaconversie in bankkantoren. Daarnaast bedachten innovatieve fabrikanten vele andere rekenmachines. Twee bekende voorbeelden zijn de direct vermenigvuldigende *Millionaire* en de uiterst compacte *Curta*. Onder de optellers (zie figuur 7) kent men namen als: *addiators, adders, addometers, calcumeters* etc. In de 20e eeuw voorzag men deze rekenmachines bovendien van afdrukmechanismen en elektrische aandrijving, waardoor gemak en functionaliteit aanzienlijk toenamen.

Elektronische rekenmachines en computers

Rond de Tweede Wereldoorlog ontwikkelde men de eerste elektrische en elektronische computers. Bekende namen zijn ZUSE, COLOSSUS, ENIAC, UNIVAC, en in Nederland de ARRA, PTERA, ZEBRA en PASCAL. Het logische schakelwerk in die binaire machines, implementaties van de 19e-eeuwse algebra van George Boole, bestond aanvankelijk uit telefoonrelais en later uit radiobuizen.
De eerste moderne computers rekenden aan specifieke





FIGUUR 5 Comptometer
FIGUUR 6 Brunsviga rekenmachine volgens principe Odhner

wetenschappelijke problemen, in tegenstelling tot de algemene *data handling* taken die de huidige computers uitvoeren.
In de 70er jaren leidden de sterk toegenomen miniaturisatie en drastische prijsverlagingen ertoe dat de *zakcalculator* voor iedereen bereikbaar werd (zie [4]).

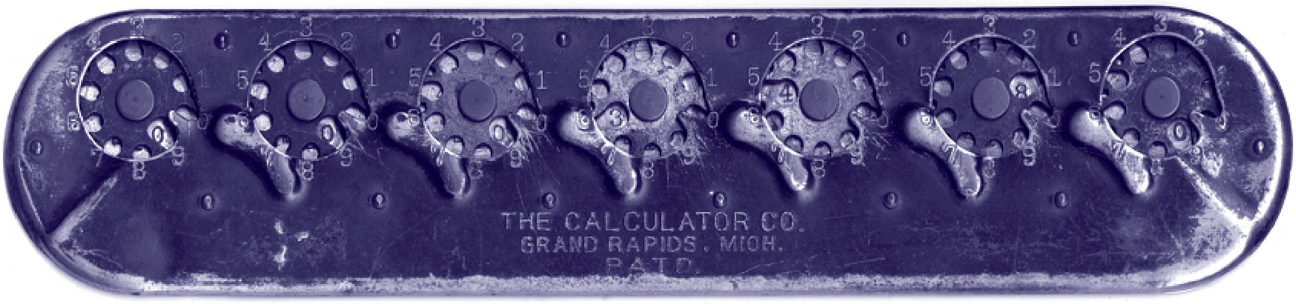
Rekenen is, zeker buiten het onderwijs, geen doel op zich, maar altijd onderdeel van een probleem-oplossing: een cijferuitkomst is geen eindresultaat, maar slechts een tussenstap in een groter proces. Als dit proces geautomatiseerd wordt uitgevoerd door een machine, leidt dit tot de *embedded calculator*, de ingebedde rekenmachine zonder toetsen en resultatenvenster, die ongezien (en soms ongecontroleerd) zijn werk doet binnen een machine. Er zijn voorbeelden te over. Denk aan de rekenfuncties binnen een digitale camera, een wasmachine, of de streepjescodescanner met pinpaslezer bij de winkelkassa die als eindresultaat slechts laat zien: '*U heeft betaald*'.
Een andere fraaie en complexe toepassing van ingebedde rekenmachines vinden we in de nieuwste auto's, waarvan de fabrikant zich in allerlei bochten wringt om u er maar van te overtuigen dat uw emoties de auto beheersen, terwijl feitelijk een aantal uiterst rationele calculators uw stuurhandelingen bewaken.

Rekeninstrumenten in de school

In het onderwijs is vaak gezegd dat gebruik van zakrekenmachines het begrip van het rekenen ten gronde zou richten. Dat argument heeft oude wortels, getuige het volgende citaat. William Oughtred, de uitvinder van de rekenliniaal, wachtte jaren tot de publicatie van zijn baanbrekende vinding in 1632, in zijn eigen woorden:

'That the true way of Art is not by Instruments, but by Demonstration:
and that it is a preposterous course of vulgar Teachers, to begin with Instruments and not with the Sciences, and so instead of Artists to make their Schollers only doers of tricks, and as it were Juglers: to the despite of Art, losse of precious time, and betraying of willing and industrious wits unto ignorance, and idlenesse. That the use of Instruments is indeed excellent, if a man be an Artist; but contemptible, being set and opposed to Art.' Zie [1].

Is het begriploos uitschrijven van een staartdeling zoveel beter dan het begriploos intypen van die deling in een zakcalculator? Gecijferdheid, het begrip voor cijferen en vooral voor de aannemelijkheid van een uitkomst, wordt niet zozeer bereikt door instrumenten voor simpele repetitieve taken tegen te houden, maar veeleer door begrip voor getallen aan de onderwijsstof toe te voegen.
Toch valt het op, dat men tot voor kort in lagere en middelbare scholen weinig gebruik maakte van rekeninstrumenten. Uitzonderingen waren simpele telramen, voor demonstratie van de 10-overloop, rekenlinialen (die maar heel even tot het curriculum behoorden en meer bedoeld waren om leerlingen het principe van de logaritmische schaal duidelijk te maken) en een paar jaar later elektronische rekenmachines. Verder had men geen grote bezwaren tegen het gebruik van logaritmetabellen. Daarentegen leerden studenten in het voortgezet en hoger militair,



FIGUUR 7 'Adder' van The Calculator Company

nautisch en elektrotechnisch onderwijs al in de negentiende eeuw, vanaf hun eerste studiedag, ook werken met rekenlinialen.
Was het de prijs die invoering van rekenhulp-middelen in het middelbaar onderwijs tegenhield, of waren het didactische of pedagogische belemmeringen? Of was de docent bang een stukje van zijn status kwijt te raken, als de leerling net zo goed kon rekenen als hij?

Mechanische rekenmachines waren eeuwenlang duur. Leraren konden ze wel als demonstratie-exemplaren voor 'real-life' rekenen gebruiken (gebeurde dat ook?), maar voor gebruik door leerlingen waren ze te kostbaar. Bovendien waren ze ook nog eens moeilijk hanteerbaar door complexe bediening, omvang en gewicht. Pas de rekenliniaal en de elektronische rekenmachine werden in de loop van de jaren '70 goedkoop en handzaam genoeg om per leerling aangeschaft te worden.
De rekenliniaal lijkt echter nooit echt populair geweest te zijn in het voortgezet onderwijs. Alleen de kleine groep docenten met een technische achtergrond had belangstelling voor dit rekenmiddel. Vermoedelijk vonden de meeste wiskundeleraren het een overbodig instrument. En hoeveel moeilijkheden moesten niet overwonnen worden voordat de zakrekenmachine in het wiskundeonderwijs werd geaccepteerd?

De grafische rekenmachine is inmiddels geaccepteerd als onmisbaar hulpmiddel bij het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo. Door de intelligente mogelijkheden van deze machine wordt niet alleen numeriek rekenwerk efficiënt en effectief uitgevoerd, maar kan hij, door zijn grafische en simulatiemogelijkheden, ook dienen als een krachtig hulpmiddel bij het verkrijgen van dieper mathematisch inzicht.
En dat alles geldt nog sterker voor de modernste computerprogramma's, die het wiskundeonderwijs ongetwijfeld minder algoritmisch, maar wel interessanter zullen maken. Daardoor zal het wiskunde-onderwijs ook beter aansluiten bij de ontwikkelingen in de maatschappij. En bovendien wordt daardoor het werk van de wiskundeleraar aangenamer: immers zijn taak wordt veel meer het kweken van mathematisch begrip en inzicht bij zijn leerlingen, waarbij slimme algoritmemachines het relatief domme werk mogen verrichten. En het betreft niet alleen algoritmen voor numeriek rekenen. Denk bijvoorbeeld ook aan symbolisch differentiëren, integreren of het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Conclusie

We zien duidelijk dat maatschappij en school vroeger gescheiden functioneerden: terwijl rekeninstrumenten overal in de maatschappij in een vroeg stadium van ontwikkeling werden geaccepteerd, deed het onderwijs er meer dan 100 jaar over om te erkennen dat door mensen uitgevoerde algoritmen net zo goed – en meestal zelfs beter - door rekeninstrumenten kunnen worden uitgevoerd. De laatste jaren echter zet de trend door, dat onderwijs in rekenen en wiskunde steeds meer wordt ondersteund door tijdbesparende en visualiserende rekeninstrumenten zoals de grafische rekenmachine en gespecialiseerde computersoftware.

Bronnen

[1] F. Cajori: A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments. Mendheam (NY): Astragal Press. Reprint 1994, naar het origineel van 1910; ISBN 1 879335 52 2.
[2] D. von Jezierski: Slide Rules, A Journey through Three Centuries. Mendheam (NY): Astragal Press (2000); ISBN 1 879335 94 8.
[3] T.A. Russo: Antique Office Machines, 600 Years of Calculating Devices. Schiffer Books, USA (2001); ISBN 0 7643 1346 0.
[4] De Teloorgang van de Rekenliniaal: www.rekenkring.nl/historie.htm
[5] Uitleg van de Napierstaafjes: http://mathworld.wolfram.com/NapierBones/
[6] Die Geschichte der Rechenhilfsmittel: www.rechenhilfsmittel.de
[7] Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen: www.rekenlinialen.org

Over de auteurs

Otto van Poelje (e-mailadres: poelje@rekenlinialen.org) werkte tot zijn pensionering enkele jaren geleden als wiskundig ingenieur in de telecommunicatie-industrie bij Philips, AT&T en Lucent Technologies. Zijn interesse ligt momenteel op het gebied van de 17e eeuwse rekeninstrumenten zoals de Gunterliniaal, die werd toegepast bij de navigatie op zee.
Simon van der Salm (e-mailadres: salm@rekenlinialen.org) is docent wiskunde bij het Adriaan Roland Holst College in Hilversum waar hij werkt voor Quest, een nieuwe vorm van leren. Zijn interesse betreft met name de mathematische achtergronden van historische rekeninstrumenten.

Over de 'Kring Historische Rekeninstrumenten'

Beide auteurs zijn lid van de KHR, de Kring Historische Rekeninstrumenten, voorheen de in 1990 opgerichte Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen. Leden van de KHR doen onderzoek naar historische rekeninstrumenten, zoals bijvoorbeeld rekenlinialen, abaci, navigatiemiddelen en (elektro)mechanische reken apparatuur.
Website: www.rekenkring.nl; zie verder hieronder.

MEDEDELING / Kring Historische Rekeninstrumenten

[Simon van der Salm]

'REKENKRING' (*www.rekenkring.nl*) is de korte naam van de *Kring Historische Rekeninstrumenten* die bestaat uit liefhebbers, verzamelaars en onderzoekers van historische rekeninstrumenten in de meest brede zin van het woord, zoals rekenlinialen, mechanische en elektronische rekenmachines, proportionaalpassers, nomogrammen, tabellen-boeken, abaci, planimeters, passers en andere tekeninstrumenten, maat- en schaallatten, en andere rekenhulpmiddelen.
Het interessegebied van de REKENKRING is gericht op historie, ontwerp, constructie, productie, verzamelen en restauratie, maar ook toepassingen, rekentechnieken en gebruik van de vele soorten rekeninstrumenten die exacte wetenschappers, technische vakmensen en andere gebruikers in het verleden tot steun zijn geweest.

De doelstellingen van de REKENKRING zijn:
- onderlinge ondersteuning van de leden in hun REKENKRING-activiteiten;
- verbreiding van algemene kennis en besef van het historisch belang van rekeninstrumenten.

De REKENKRING is voornamelijk Nederlandstalig. Voor internationale contacten maakt de REKENKRING gebruik van de Engelse naam, 'Dutch Circle for Historical Calculating Instruments'.

De REKENKRING komt voort uit de 'Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen', en omvat ook een aantal leden van de voormalige vereniging 'Mercurius' voor historische kantoormachines.

Nadere informatie is te verkrijgen bij Otto van Poelje (*poelje@rekenlinialen.org*) of Simon van der Salm (*salm@rekenlinialen.org*), of via de website *www.rekenkring.nl*.

WERKEN MET KOMMAGETALLEN

[Jan Folkert Deinum en Egbert Harskamp]

Rekenen met kommagetallen: niet makkelijk

Kommagetallen zijn met de invoering van het metriekstelsel in de techniek en het dagelijks leven en door de komst van computers steeds belangrijker geworden. Slechts in enkele praktijksituaties komen nog breuken voor. We gebruiken nog begrippen als $\frac{1}{2}$ liter en $\frac{3}{4}$ deel, maar $\frac{3}{8}$ liter niet meer. In de techniek komen maataanduidingen als $\frac{3}{8}$ en $\frac{7}{8}$ (inch) wel voor, maar er wordt zelden mee gerekend. Ook in het voortgezet onderwijs zijn de gewone breuken steeds minder belangrijk geworden. Het rekenen met breuken werd altijd als zeer moeilijk ervaren door de meeste leerlingen. Is dat met kommagetallen anders?
Helaas, rekenen met kommagetallen is voor een leerling in het basis- en voortgezet onderwijs vaak een groot probleem. Neem bijvoorbeeld de opgave:

Wilma is 153,6 cm lang. Vorig jaar was zij 146,7 cm lang. Hoeveel is Wilma sinds vorig jaar gegroeid?

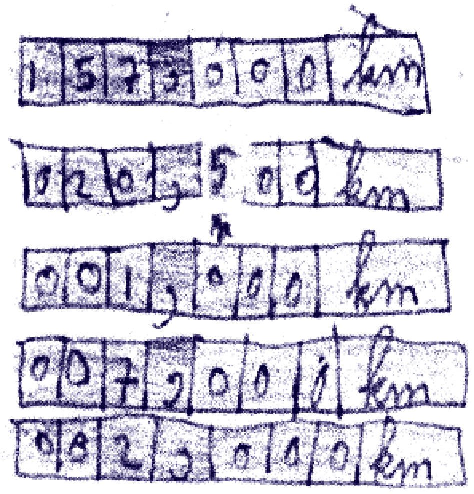
Janssen et al. (1999) vermelden dat rekenen met kommagetallen tot de slecht beheerste basisvaardigheden in groep 8 van de basisschool behoort. Een opgave zoals hierboven wordt door de helft van de leerlingen matig tot onvoldoende beheerst. Bij vermenigvuldigen en delen met kommagetallen komen nog vaker fouten voor. Vermenigvuldigen van kommagetallen in geldcontexten (53 × € 4,35 = ...) en gehele of kommagetallen delen door een kommagetal (1860 : 7,50 = ...) worden niet beheerst door 50% van de leerlingen en door 75% van de leerlingen matig tot onvoldoende.

Oorsprong van de problemen

Fischbein et al. (zie [2]) onderzochten hoe leerlingen van de bovenbouw van de basisschool vermenigvuldigen en delen met kommagetallen begrepen. Hun theorie is als volgt samen te vatten. Leerlingen hebben een intuïtief beeld bij rekenbewerkingen. Bij optellen denken leerlingen aan 'dingen bij elkaar doen', bij aftrekken aan 'iets wegnemen', bij vermenigvuldigen is dat 'herhaald optellen' en bij delen is het 'een groep verdelen (eerlijk delen)' of 'herhaald aftrekken'. Bij gehele getallen gaat zo'n intuïtief beeld vaak goed op.
Maar het beeld klopt niet meer als een leerling gaat vermenigvuldigen of delen met kommagetallen: hoe tel je een getal 0,65 keer op? En hoe kun je vier snoepjes verdelen met 0,4 vrienden? De intuïtieve modellen van leerlingen houden dus in dat vermenigvuldigen altijd tot een groter aantal zou moeten leiden en delen tot een kleiner aantal. Fischbein et al. voerden onderzoek naar deze theorie uit onder honderden leerlingen in Pisa, Italië. De problemen die de leerlingen hadden met eenvoudige toepassingsopgaven voor vermenigvuldigen en delen met kommagetallen ondersteunden de theorie. Zodra bij deze bewerkingen kommagetallen worden gebruikt die leiden tot uitkomsten die tegen de intuïtieve modellen ingaan, maken leerlingen veel fouten.
Harel et al. (zie [4]) laten zien dat als opgaven worden ingebed in contexten met voorstelbare maateenheden het effect van de intuïtieve modellen kleiner wordt. Bijvoorbeeld bij de opgave:

Er is een rol gordijnstof van 12 meter lang; hoeveel stukken van 0,75 meter lang kun je daaruit knippen?

Deze opgave wordt door veel minder leerlingen fout opgelost dan een opgave als 12 : 0,75 = ... Sommige contexten werken dus bevorderlijk voor het goed oplossen van opgaven met kommagetallen. Meestal zijn het contexten waarin leerlingen de getallen kunnen voorzien van een 'ondermaat' (bijvoorbeeld: van meters maak je centimeters), waarna ze met hele getallen kunnen werken. De modellen worden zo niet aangetast en het werken met komma's kan worden omzeild.



FIGUUR 1

Kommagetallen in reken-wiskundemethoden

De realistische rekenmethoden die op de meeste basisscholen worden gebruikt introduceren de kommagetallen vooral via maatgetallen, geldrekenen en tiendelige breuken. Er worden voorbeelden uit de dagelijkse praktijk gegeven waarbij een hoofdmaat (zoals meter of kilogram) verdeeld kan worden in ondermaten volgens een indeling in 10, 100 of 1000 delen. Er wordt gebruik gemaakt van de getallenlijn (meter die in tienen wordt gedeeld) en het positieschema (kilometerteller) als ondersteunende modellen voor uitleg (zie figuur 1).

Het valt op dat in de methoden bij het leren optellen en aftrekken het positieschema wél veel aan bod komt. Bij vermenigvuldigen en delen overheerst echter het cijfermatig rekenen. Er wordt getracht via het cijferen met gehele getallen het cijferen met kommagetallen inzichtelijk te maken. De verschillende modellen en oplossingswijzen voor begripsvorming, optellen en aftrekken en cijferend vermenigvuldigen en delen sluiten niet goed op elkaar aan. Bij optellen en aftrekken met kommagetallen wordt soms bij contextopgaven splitsend gewerkt (49,5 km + 39,7 km: eerst hele km uitrekenen en dan 500 m + 700 m). Bij kale opgaven wordt cijferen onder elkaar met inwisselen in een positieschema geoefend. Het vermenigvuldigen en delen met kale kommagetallen gebeurt via de cijferprocedure. Bijvoorbeeld in 24,4 × 24,5: eerst komma's 'wegvermenigvuldigen' door × 10 en nog eens × 10 te doen, dan zonder komma cijferen met 244 × 245 en tot slot de komma terug brengen door te delen door 10 × 10 en de komma twee plaatsen naar links te verschuiven in het antwoord.

Rekenen met kommagetallen in verschillende contexten

In 1995 hebben we onderzocht welke problemen leerlingen hebben met het rekenen met kommagetallen in een variatie aan contextopgaven en kale opgaven (zie [1]). De opgaven zijn afkomstig uit het eerste PPON-onderzoek (zie [8]). Er is onderzocht welke oplossingswijzen leerlingen met matige rekenvaardigheid gebruiken bij het rekenen met kommagetallen en welke fouten zij daarbij maken. Doel was na te gaan hoe het rekenonderwijs over kommagetallen kan worden verbeterd voor een grote groep leerlingen. Aan het onderzoek namen vier scholen deel die de methode *Rekenen en Wiskunde* gebruikten. Van elke school werden vijf leerlingen uit groep 8 geselecteerd met een mavo-verwijzing.

Begrip van kommagetallen

Allereerst is nagegaan wat leerlingen van kommagetallen begrijpen als het gaat om plaatsing op de getallenlijn en de plaatswaarde binnen kommagetallen. Leerlingen lijken een goed idee te hebben van de waarde van kommagetallen, blijkend uit de volgende opgave:

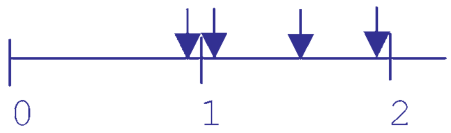
Zet de getallen bij de juiste pijlen (zie figuur 2)*:*
1,495   0,94   1,9   1,09

Bijna alle leerlingen (94%) slagen erin, de getallen bij de juiste pijlen te plaatsen. Bij de volgende opgave over de relatie tussen breuken en kommagetallen helpt de context de leerlingen:

Kim vraagt een en een kwart ($1\frac{1}{4}$) *kg kaas. Hij krijgt 1,268 kg. Hoe groot is het verschil?*

De meeste leerlingen rekenen bij deze opgave met hele grammen en vermijden de kommagetallen; 66% heeft deze opgave goed.
Naast contextopgaven zijn er ook kale opgaven om het begrip van kommagetallen na te gaan los van een situatie. Het afronden van een kommagetal op tienden vraagt om dit begrip:

Rond het getal 245,648 af op tienden.





FIGUUR 2

FIGUUR 3

Strategie	Aantal
245,6 (goed)	19%
245,650 of 245,65 (afgerond op honderdsten)	40%
250,648 (afgerond op tientallen)	13%
246 (afgerond op heel getal)	3%
245,7 (eerst 245,65 en dan 245,7)	19%
Onbekend	6%
Totaal	100%

De resultaten laten zien dat slechts 19% van de leerlingen de opgave goed oplost. Nog eens 19% rondt wel af op tienden, maar volgt een verkeerde procedure: eerst wordt afgerond op honderdsten, dan pas op tienden. We veronderstellen dat deze leerlingen wel een goed begrip hebben van afronden van kommagetallen op tienden, maar dat zij de procedure nog onvoldoende hebben begrepen. Datzelfde probleem dook ook op bij een andere opgave. Een mogelijk probleem bij deze opgave is dat leerlingen niet door hebben wat de relatie is tussen de breuk *tienden* en het kommagetal: een tiende is voor leerlingen een breuk en een breuk is voor een leerling geen kommagetal. Een simpele oplossing voor dit probleem is door bij kommagetallen niet te spreken over tienden of honderdsten, maar te spreken over het aantal cijfers achter de komma, zoals bijvoorbeeld ook bij natuurkunde gebeurt.
Conclusie: de leerlingen blijken een goed inzicht hebben in de betekenis en waarde van komma-getallen. Dit is een positievere uitkomst dan de PPON-toetsen in 1988. Leerlingen worden echter snel in verwarring gebracht doordat ze bijvoorbeeld een begrip als *tienden* niet goed begrijpen. Breuken hebben voor de leerling waarschijnlijk weinig gemeen met kommagetallen.

Optellen en aftrekken

Het optellen en aftrekken van kommagetallen levert bij de meeste leerlingen geen problemen op. De meeste leerlingen blijken bij het optellen en aftrekken een voorkeur te hebben voor cijferend rekenen. Splitsend rekenen, handig rekenen en hoofdrekenen komen niet frequent voor.

Achmed rijdt van Hallum naar Freis. Hij komt een wegwijzer tegen; **zie figuur 3.** *Hoe ver is het van Hallum naar Freis?*

De oplossingswijzen zijn als volgt:

Strategie	Aantal	Goed antwoord
Cijferen	72%	63%
Uit het hoofd	19%	9%
Splitsen: 5 + 7 = 12 en 7 + 8 = 15 dus 1,5 samen 13,5	3%	3%
Onbekend	6%	3%
Totaal	100%	78%

De meeste leerlingen zetten de twee getallen onder elkaar en tellen op. Cijferen is kennelijk een veilige strategie. Het aftrekken van een kommagetal van een geheel getal levert veel vaker problemen op. De leerlingen zijn zich onvoldoende bewust van de niet geschreven nullen achter het gehele getal waardoor ze cijferend rekenen alsof er niets staat achter het gehele getal.

Een andere opgave.

17 – 3,75 – 3,25

De oplossingen zijn als volgt:

Strategie	Aantal	Goed antwoord
Cijferen in één keer	22%	3%
Cijferen in twee stappen	32%	19%
Handig: 17-7	28%	22%
Uit het hoofd	3%	3%
Cijferend 3,25 + 3,75, dan 10 – 7	3%	3%
3,75 – 3,25 = 0,5; 17 – 0,5 = 16,5	6%	-
Onbekend	6%	-
Totaal	100%	53%

Deze opgave wordt dus door slechts 53% van de leerlingen goed beantwoord. Vooral het cijferen is

hier een weinig succesvolle strategie. Leerlingen moeten achter 17 een komma zetten en twee nullen invullen. Ze doen dat vaak niet. Anderen doen dat wel, maar maken fouten met het lenen.

Conclusie: de meeste leerlingen hebben weinig problemen met het optellen en aftrekken van kommagetallen zolang het aantal cijfers achter de komma maar gelijk is. Ze hanteren meestal een cijferstrategie waarbij ze weinig fouten maken zolang ze de komma's maar precies onder elkaar schrijven. Aan die precisie ontbreekt het soms en daardoor ontstaan fouten: verkeerde getallen van elkaar afgetrokken, een getal onthouden wordt niet goed genoteerd enzovoort. Veel leerlingen blijken daarnaast splitsend te rekenen, getallen voor en achter de komma apart. Een methode die voor leerlingen bij het gebruik van contexten erg inzichtelijk is.

Vermenigvuldigen en delen

Opmerkelijk is dat de leerlingen uit het onderzoek minder problemen hebben met de door Fischbein e.a. veronderstelde intuïtieve modellen bij het vermenigvuldigen en delen van kommagetallen. Ze gebruiken als het kan de context (meetgetallen) om problemen te omzeilen (zie ook [4]). Een voorbeeld hoe leerlingen in dit onderzoek omgaan met het intuïtieve idee dat een kommagetal dat wordt vermenigvuldigd altijd groter wordt, is te zien in de volgende opgave:

Druiven kosten ƒ 2,30 per kg. Hoeveel kost 0,8 kg?

Strategie	Aantal	Goed antwoord
Cijferen	34%	28%
2,30 : 5 = ...; dan ... × 4	17%	13%
Via 0,1	3%	3%
1000 gram is 2,30; 100 gram is 0,23	3%	3%
0,8 × 10 = 8; 8 × 2,30 = ... ; dan ... : 10	3%	3%
Verhoudingstabel	9%	6%
2,30 : 10 × 8	3%	3%
Onbekend	28%	-
Totaal	100%	59%

Verscheidene leerlingen verdelen het in porties (ƒ 2,30 in tien porties van 0,1 kg is ƒ 0,23 per portie; dus ƒ 0,23 × 8), waarbij velerlei varianten worden toegepast. Deze leerlingen vatten de opgave niet op als een vermenigvuldiging, maar als een verdeling. Veel slechter maken de leerlingen echter de kale opgave 42,5 × 1,84. Hier krijgen ze problemen met hun intuïtieve model van vermenigvuldigen als herhaald optellen. Leerlingen plaatsen een extra 0 achter 42,5 en zetten de komma's onder elkaar. Ze maken veel fouten in het rekenwerk en bij het plaatsen van de komma in het eindantwoord. Sommige leerlingen proberen het met splitsend rekenen: 42 × 1,84 en 0,5 × 1,84. Deze aanpak is wel inzichtelijk, maar heeft alleen zin als je systematisch werkt en alle deelproducten uitrekent (bijvoorbeeld 42 × 1; 42 × 0,8 en 42 × 0,04). Bij de onderzochte leerlingen ontbrak het aan deze systematiek.
Bij delen gebeurt iets soortgelijks als bij het vermenigvuldigen. In een contextopgave levert het delen nauwelijks problemen op:

De school heeft voor een toneelvoorstelling ƒ 600,- ontvangen. Een kaartje kost ƒ 7,50; hoeveel kaartjes zijn er verkocht?

Strategie	Aantal	Goed antwoord
Handig proberend: 2 × 7,50 × 2 × 2 × 10	57%	57%
Verhoudingstabel	6%	3%
Ophogen en deling: 75/6000\	3%	3%
Staartdeling: 75/600\, antwoord × 10	3%	-
Verdubbelen	3%	3%
Staartdeling: 7,50/600\	9%	9%
Onbekend	19%	-
Totaal	100%	75%

De meeste leerlingen gaan bij deze opgave niet delen, maar zien hier een vermenigvuldigopgave in: 2 kaartjes voor ƒ 15,- dus 20 voor ƒ 150,- en 80 voor ƒ 600,-. Ongeveer 75% van de leerlingen doet deze opgave goed door verhoudingsgewijs te vergroten.
Het zijn deze oplossingswijzen uit de methode die de oplossingen van leerlingen met succes ondersteunen en die getuigen van een goed begrip van wat er gebeurt.

Een kale opgave die echter buitengewoon slecht wordt gemaakt is:

11,011 : 10

Het schuiven met de komma vindt niet plaats. Slechts 9% van de leerlingen weet daar het goede antwoord op te vinden en doet dat met een staartdeling, een werkwijze die niet door de methode wordt aangeboden. De methode gaat er echter van uit dat het delen en vermenigvuldigen met tientallen feilloos verloopt, omdat dit wordt gebruikt in de oplossingsstrategieën die worden aangeboden.

Conclusie: de leerlingen maken weinig fouten in de vermenigvuldigopgaven. Dat komt omdat leerlingen bij twee van de drie opgaven kunnen werken met handige maten (liters en cl, of kg en gram) waardoor ze niet met kommagetallen hoeven te cijferen. De kale opgaven worden veel slechter gemaakt. Bij de vijf deelopgaven zien we hetzelfde beeld. Zolang leerlingen een strategie toepassen waarbij ze het rekenen met kommagetallen en het delen kunnen vermijden gaat het goed, zodra dit niet meer het geval is gaat het oplossen fout. Zorgelijk is dat leerlingen niet snel een kommagetal door 10 kunnen delen.

Aanbevelingen voor de praktijk

In onze aanbevelingen gaan we ervan uit dat leerlingen vooral inzicht krijgen in de grootte van kommagetallen en onderlinge verhoudingen tussen kommagetallen wanneer er mee gerekend wordt. Schattend rekenen vinden we in dat licht belangrijker dan cijferend rekenen, omdat veel leerlingen al snel zullen overstappen op het rekenen met de rekenmachine. We vinden het van belang dat ze uitkomsten met die rekenmachine op waarde kunnen schatten. Daarvoor is een goed inzicht in de bewerkingen nodig.

1. Basiskennis en begrip van kommagetallen

Leerlingen kunnen kommagetallen vaak wel opvatten als maatgetallen die een verfijning aangeven. Ze splitsen daarom kommagetallen in hele getallen en cijfers achter de komma, zoals je meters en centimeters of euro's en centen kunt splitsen. De centimeters of centen behandelen ze intuïtief als hele getallen. Het probleem is dat daarmee het inzicht in de plaatswaarde van cijfers achter de komma verdwijnt (wat is het verschil tussen 1,090 en 1,9 of 1,900?). Wanneer leerlingen kommagetallen leren zien als maatgetallen binnen een tientallig inwisselsysteem en actief leren afronden, dan is het inzicht in de structuur van kommagetallen te verbeteren. We gaan dus niet in tegen de neiging om kommagetallen te splitsen, maar benoemen de afgesplitste cijfers: 1,369 wordt 1 km en 369 m of 1 euro en 37 cent. Afronden levert ongeveer 1 km en 400 m is 1,4 km op of ongeveer 1 euro en 4 dubbeltjes is € 1,40. De methodes doen bij de introductie veel aan kommagetallen als maatgetallen, maar ze komen weinig tot het actief structureren door middel van afronden of door het verfijnder (actief) laten meten en noteren door leerlingen. TAL (zie [7]) pleit ervoor om dat te doen met benoemde tienden en honderdsten en niet door direct aan te sluiten bij concrete maatgetallen zoals meters, kilogrammen en geld. We kunnen daarvoor geen bevestiging vinden in ons onderzoek. Leerlingen lijken juist plaatswaarde wel goed te begrijpen. De overgang van maatgetallen naar kommagetallen is een hele natuurlijke en voor leerlingen inzichtelijk. Kommagetallen zijn voor de meeste leerlingen op het moment dat die getallen in de methoden worden geïntroduceerd niet meer nieuw, maar een bekend fenomeen uit de dagelijkse praktijk.

2. Optellen en aftrekken met kommagetallen

Optellen en aftrekken met kommagetallen is voor de meeste leerlingen geen probleem. Vooral het splitsend rekenen lijkt voor leerlingen inzichtelijk te zijn wanneer met maatgetallen wordt gewerkt. Wanneer gecijferd moet worden zijn leerlingen nogal eens slordig, waardoor onnodig fouten worden gemaakt. Netjes werken blijft noodzakelijk.

3. Het vermenigvuldigen van kommagetallen

Voor het vermenigvuldigen van kommagetallen is het verstandig om de verhoudingstabel te gaan gebruiken. Leerlingen moeten inzien dat het bij vermenigvuldigen met kommagetallen om een proportionele 'vergroting' gaat. Dit model voor kommagetallen ontbreekt in de methoden, maar leerkrachten kunnen het heel goed opnemen in hun inleidende lessen:

Een boompje is na 1 jaar 1,2 m. Het wordt elk jaar groter t.o.v. het eerste jaar (zie tabel). Hoe groot is het boompje het derde jaar en het zesde jaar?

Jaar	1	2	3	4	5	6
Vergroting t.o.v. jaar 1	1×	1,1×	1,4×	1,8×	1,9×	2,1×
Lengte	1,2 m	...	...	...	...	...

Het rekenen van bijvoorbeeld $1{,}2 \times 1{,}4$ kan splitsend worden gedaan: eerst $1{,}2 \times 1 = 1{,}2$ dan $1{,}2 \times 0{,}4$ ($12 \times 0{,}4 = 4{,}8$ dus $1{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}48$). Splitsend rekenen sluit goed aan bij wat leerlingen zelf vaak doen. Wel maken zij veel fouten in het systematisch uitvoeren van de verschillende deelbewerkingen. Het verdient dus aanbeveling om juist dat systematisch werken te trainen.

Eenzelfde uitleg is te bedenken bij het aantal roofvogels dat op een eiland woonde. In het eerste jaar 200 roofvogels:

Jaar	1	2	3	4	5
'Vergroting' t.o.v. jaar 1	1×	0,9×	0,8×	0,6×	0,5×
Roofvogels	200	...	...	...	...

In welk jaar zijn nog maar de helft van de roofvogels over? In welk jaar zullen er geen roofvogels meer zijn?

Dit verhoudingsmodel is handig om te leren inzien dat vermenigvuldigen met een factor groter dan 1 een vergroting oplevert en met een factor kleiner dan 1 een verkleining. Dit feit moet leerlingen expliciet worden duidelijk gemaakt in bijvoorbeeld onderwijsleergesprekken.

Bij vermenigvuldigen van kommagetallen kan vervolgens gebruik gemaakt worden van het schattend rekenen vooraf en het cijferend rekenen met kale getallen en later de komma plaatsen denkend aan de hele getallen (en niet aan de plaatsen achter de komma).

4. Het delen van en door kommagetallen

Leerlingen behandelen het delen met kommagetallen zelf via de inverse bewerking: het vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld: hoeveel lappen stof van 0,8 m kunnen uit een rol stof van 20 m? De verhoudingstabel kan hier goede diensten bewijzen.

meters	0,8	4	8	16	20
lappen	1	5	10	20	25

Dit model is echter niet voor alle situaties zonder meer geschikt. Neem bijvoorbeeld de opgave 2 : 6. Je

kunt kinderen niet leren om al proberend met 6 te vermenigvuldigen. Door echter te denken aan bijvoorbeeld 2 m dropveter die verdeeld moet worden over zes kinderen wordt de verhoudingstabel weer geschikt. We kunnen kinderen leren om al vermenigvuldigend te proberen. We beginnen bijvoorbeeld eerst elk kind 0,1 m te geven. Dat is 0,1 × 6. Daarna elk kind 0,2 m etc., net zolang tot 2 m is opgedeeld.

meters	0,6	1,2	1,8	0,18	1,98
aantal	0,1 × 6	0,2 × 6	0,3 × 6	0,03 × 6	0,33 × 6

Wanneer leerlingen het werken met de verhoudingstabel goed begrijpen, dan kunnen ze ook goed schattingen maken van de uitkomst van een deling als 2 : 6. Je denkt aan 1,8 : 6 = 0,3 dus 2 : 6 is iets meer. Vanuit het schatten kan het cijferend delen met hele getallen worden aangeboden. Een opgave als 2 : 7 kan worden uitgerekend met de gedachte: 7 × 0,3 kan net niet, maar 7 × 0,2 wel. Dus 2 : 7 = 0,2... De leerling weet door het schatten dat de uitkomst begint met 0,2... Schattend rekenen helpt bij het controleren van het antwoord bij het rekenen met de rekenmachine of het handmatig cijferen met kommagetallen.
Na het schatten kan het cijferen met kommagetallen worden geïntroduceerd met contextopgaven die over maten gaan. Bijvoorbeeld: ‘Er is een rol lood van 13,45 meter. De rol moet worden versneden in stukken van 1,65 meter. Hoeveel stukken lood kan ik uit de rol halen?’ Het kind kan in deze fase begrijpen dat uit 13,45 meter stukken van ongeveer 1.65 meter moeten worden gehaald ofwel 13,45 : 1,65. Een dergelijke opgave kan zonder kommagetallen worden uitgerekend door van meter naar cm te gaan: 1345 : 165. In een latere fase kunnen ook kale opgaven op deze manier worden uitgerekend, bijvoorbeeld 26,113 : 1,787 = ... Maak er millimeters van, of abstracter: ‘Vermenigvuldig beide delen van de deling met 1000’.
Ons voorstel is dus eerst het delen van kommagetallen aan te leren met verhoudingstabellen waarmee al proberend wordt vermenigvuldigd. Later worden contextopgaven met geschikte ondermaten gebruikt waarmee de komma wordt weggewerkt om vervolgens een opgave cijferend op te lossen.

5. Rekenen met het tientallig stelsel

Het delen van een kommagetal door 10 blijkt niet vlot te gaan bij leerlingen. Het is wel essentieel voor het werken in het tientallig stelsel. Het vergt veel meer oefening dan bij de onderzochte leerlingen is gebeurd. Een aantal leerlingen laat zien dat zij wel hebben gehoord van het schuiven met de komma, maar ze begrijpen niet wat ze doen. Het aanleren van het schuiven met de komma hoeft geen probleem te zijn, maar dan moeten leerlingen wel kunnen uitleggen waarom het mag. Dit kan bijvoorbeeld door gebruik te maken van maatgetallen. Neem bijvoorbeeld 3,4 : 0, 7 = ... Eerst aan m en cm denkend wordt het 340 : 70, ofwel beide getallen met 100 vermenigvuldigen.

Conclusie

De stelling van Fischbein et al. (zie [2]), zoals eerder beschreven, blijkt niet te worden bevestigd in dit onderzoek. Leerlingen die matig scoren op rekenen/wiskunde, blijken geen problemen te hebben met intuïtieve tegenstellingen in het rekenen met kommagetallen. We vermoeden dat dat te maken heeft met het leren rekenen met maatgetallen. Die maken het voor leerlingen eenvoudig om te begrijpen wat er gebeurt als er gerekend wordt met kommagetallen. We pleiten er dan ook voor om in het vervolgonderwijs vooral vast te houden aan het rekenen met maatgetallen en niet met breuken, omdat die maatgetallen goed aansluiten bij de kennis van leerlingen.

Literatuur

[1] J.F. Deinum, E. Harskamp: Oplossingswijzen voortgezet rekenen. Groningen: RuG/GION (1995).
[2] E. Fischbein, M. Deri, M.S. Nello, M.S. Marino: The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: Journal for Research in Mathematics Education, 16, pp. 3–17 (1985).
[3] A.O. Graeber, D. Tirosh: Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. In: Educational Studies in Mathematics, 21, pp. 565-588 (1990).
[4] G. Harel, M. Behr, T. Post, R. Lesh: The impact of number type on the solution of multiplication and division problems - Further considerations. In: G. Harel, J. Confrey (eds.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 365-388). Albany, NY: SUNY Press (1994).
[5] J. Janssen, F. van der Schoot,B. Hemker, N. Verhelst: Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool, 3. Arnhem: CITO (1999).
[6] OCW: Kerndoelen basisonderwijs; www.minocw.nl/kerndoelen/kern.doc (1998).
[7] TAL: Breuken, verhoudingen, kommagetallen, procenten. Utrecht: Freudenthal Instituut (2003); www.fi.uu.nl/rekenweb/tal/.
[8] J.M. Wijnstra (red.): Balans van het rekenonderwijs in de basisschool. Arnhem: CITO (1988).

Over de auteurs

Jan Folkert Deinum (e-mail: j.f.deinum@rug.nl) is docent onderwijskunde aan de lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen. Hij houdt zich in zijn huidige werk vooral bezig met onderzoek naar e-learning in het voortgezet en hoger onderwijs en is verantwoordelijk voor een aantal ICT-implementatietrajecten in lerarenopleiding en hoger onderwijs.
Egbert Harskamp (e-mail: e.g.harskamp@ppsw.rug.nl) is docent onderwijskunde en orthopedagogiek aan de faculteit der Psychologische, Pedagogische en Sociologische Wetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen. Hij houdt zich onder andere bezig met opsporen van rekenachterstanden, interventieonderzoek en onderzoek naar computerondersteund probleemoplossen.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

GECIJFERD

Hoe ga je om met de kwantitatieve aspecten van de wereld om ons heen?

[Kees Hoogland]

Inleiding

In juni 2004 verscheen het eindrapport van de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming. In dat rapport zijn karakteristieken geformuleerd voor de verschillende vakken en leergebieden. Bij het vak, of misschien wel leergebied, wiskunde is daar het volgende te vinden:

Aansluitend op het basisonderwijs ontwikkelen ze hun vaardigheden in de 'wiskundetaal' en worden steeds verder 'wiskundig geletterd en gecijferd'.
(...)
'Wiskundig geletterd en gecijferd worden' wil zeggen dat leerlingen het vermogen ontwikkelen om in de verschillende situaties van hun huidig en toekomstig leven aan wiskunde gerelateerde informatie te herkennen, te interpreteren en te gebruiken. Daartoe bouwen ze een repertoire op van parate kennis, inzichten, routines en attitudes.

Deze formuleringen zijn vrij bijzonder. Voor het eerst verschijnen in een officieel document voor het voortgezet onderwijs de termen *gecijferdheid* en *wiskundige geletterdheid*. Maar wat is dat en waar komt het vandaan? En vooral ook: wat moeten we ermee?

Waar gaat het over?

Onze maatschappij is doordesemd van getallen, aantallen, patronen, aspecten van tijd, ruimte en afstand. In Amerika zegt men wel: 'We live in a data-drenched society.' De plaatjes bij dit artikel laten daar iets van zien. Op een doorsnee dag komt de gemiddelde burger ontzettend veel kleine gecijferdheidssituaties tegen: de wekker, koffie zetten, tijd om te vertrekken, strippenkaarten, nog genoeg benzine om het werk te halen, even bellen, betalen, et cetera, et cetera. Daarnaast speelt gecijferdheid ook een grote rol bij belangrijke beslissingen in het leven: hypotheken, verhuizen, grote aankopen, lenen, budgetteren. En politici en bestuurders gebruiken ook steeds vaker cijfermatig materiaal om beleid te maken of te verdedigen: criminaliteitscijfers, economische indices, prognoses, doorrekeningen door het CPB, et cetera. Burgers worden geacht dat op hun waarde te kunnen schatten.
Meestal zijn we ons niet zo bewust van het feit dat we voortdurend geconfronteerd worden met kwantitatieve situaties. Het is nu eenmaal zo en we gaan er zo goed mogelijk mee om.
Mijn stelling is echter dat de gemiddelde burger daar helemaal niet zo goed mee omgaat.
Wie kan een tabelletje met percentages direct goed doorzien? Wie kan de instructies bij het bouwen van een doe-het-zelf kast moeiteloos interpreteren? Wie kan vlot omgaan met de menustructuur in een GSM? Wie stapt met € 100 in, in de vierde ronde van een kettingbrief? Wie beseft alle mogelijke consequenties van een aandelen-lease-constructie? Wie doorgrondt alle indices die in politieke debatten worden gebruikt? In Nederland kan het zelfs statusverhogend zijn te zeggen dat je van getallen en dergelijke niets, maar dan ook helemaal niets begrijpt.

Definities

Wereldwijd wordt er druk gediscussieerd over het belang van gecijferdheid of wiskundige geletterdheid voor de moderne burger die moet functioneren in de huidige maatschappij. En dan gaat die discussie ook over hoe in het onderwijs daaraan aandacht besteed moet worden.
Omdat het om nieuwe begrippen gaat wemelt het op dit moment nog van verschillende definities. Ik geef twee veelgebruikte definities.

Gecijferdheid is een amalgaam van vaardigheden, kennis, opvattingen, disposities, denkwijzen, communicatiemogelijkheden en vaardigheden voor het oplossen van problemen, die individuen nodig hebben om autonoom deel te nemen aan en adequaat te handelen in gecijferdheidssituaties, waarbij het gaat om getallen, kwantitatieve of kwantificeerbare informatie, visuele of tekstuele informatie die gebaseerd is op wiskundige ideeën of wiskundige elementen bevat. (Gal, 2000)

Wiskundige geletterdheid is het vermogen om wiskunde te herkennen, te begrijpen en te gebruiken. Dit vermogen moet het mogelijk maken goed beargumenteerd een oordeel uit te spreken over de rol die wiskunde speelt, en dan wel die wiskunde die nodig is in iemands huidige of toekomstige leven, werkzame leven, sociale leven met kennissen en familieleden,en zijn/haar leven als een constructieve, betrokken en reflectieve burger. (OECD, 1999)

De eerste definitie is van Iddo Gal, een leerpsycholoog uit Israël die veel onderzoek heeft gedaan naar gecijferdheid in de volwasseneneducatie. Daarin wordt vooral het autonoom en adequaat handelen benadrukt: hoe kun je effectief en zelfstandig je weg vinden in gecijferdheidssituaties.
De tweede definitie gaat uit van wiskunde als een vaststaand en overal ter wereld vergelijkbaar stuk kennis, dat een rol speelt in de maatschappij. Het is de definitie die ook gebruikt wordt in het PISA-onderzoek. In het PISA-onderzoek vergelijkt men de prestaties van leerlingen in verschillende landen. Als u dit leest, zijn net de resultaten bekend geworden van de metingen in 2003 en 2004. Deze resultaten zullen in diverse landen ongetwijfeld weer voor heftige discussies zorgen.
De eerder genoemde definitie van de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming leent wat van beide definities. Zij doen overigens verder geen uitspraken hoe dit vertaald kan worden in onderwijs.
De vraag die zich opdringt is de volgende: 'Leveren de reken- en wiskundelessen in basisonderwijs en voortgezet onderwijs dan niet de basis die nodig is voor het adequaat en autonoom handelen in kwantitatieve situaties of voor het kunnen begrijpen van de rol die wiskunde speelt in de maatschappij?'



FIGUUR 3

Opdracht 58

Oefenen met sommen die op elkaar lijken. Maak eerst de som tot 100 en dan de som tot 1000.

35 + 25	= …	→	250 + 250	= …
75 + 19	= …	→	750 + 190	= …
58 + 28	= …	→	580 + 280	= …
34 + 26	= …	→	340 + 260	= …
29 + 39	= …	→	290 + 390	= …
65 + 16	= …	→	650 + 160	= …

FIGUUR 4

Als ik kritisch naar de huidige reken- en wiskundelessen kijk, dan is mijn antwoord: 'Nee, eigenlijk niet, of in ieder geval niet voldoende.'

Rekenlessen en gecijferdheidssituaties

Er is nog niet zo heel veel bekend over wat iemand nu precies doet als hij of zij handelt in een gecijferdheidssituatie. In veel gevallen gaat het om een onmiddellijke interpretatie, inschatting en meningsvorming, die in de meeste gevallen uit het hoofd wordt gedaan. Of misschien beter gezegd: in het hoofd wordt gedaan. Alhoewel mensen natuurlijk sterk verschillen op dit gebied, zijn de volgende gedragingen vrij algemeen: als men een grafiekje krijgt voorgeschoteld en weet waar dit grafiekje over gaat, dan trekt men direct conclusies uit het verloop van de grafiek. Of anders gezegd, men koppelt het verloop van de grafiek direct terug naar de werkelijkheid. Als men een loonstrookje ontvangt, kijkt men direct naar het nettobedrag en besluit of het klopt of dat er iets bijzonders aan de hand is. Hetzelfde geldt voor allerlei rekeningen en afschriften. Als men op TV iemand in een politieke discussie allerlei getallen hoort aanvoeren voor een standpunt, dan haakt men af of men besluit dat het dus wel waar moet zijn. Zo zou je rekenen/wiskunde en gecijferdheid enigszins gechargeerd als volgt tegenover elkaar kunnen zetten.

aan het verbinden met de werkelijkheid, aan het terugkoppelen naar het probleem, aan het doorpraten over de consequenties. Dat geldt zowel voor het basisonderwijs als voor het voortgezet onderwijs. En de vraag is of het doen van sommetjes wel de meest effectieve manier is om leerlingen goed voor te bereiden op de kwantitatieve kant van onze wereld. Voor zwakke leerlingen is dat in ieder geval zeker niet het geval. Bekijkt u de sommetjes in figuur 4 eens en raad uit welke jaarlaag dit komt.

Deze opgave komt uit een mbo-methode voor KSE-niveau 1, leeftijd 16 tot 18 jaar.
Waarschijnlijk is er in groep 6 al mee geoefend, in de brugklas nog een keer, in 4-vmbo nogmaals, en nu weer aan dezelfde sommen. Er is weinig reden om aan te nemen dat deze oefening nu opeens wél zal leiden tot bruikbare kennis en vaardigheden.
De legitimatie om dit te doen op het mbo is, dat ze het nog niet kunnen. Die legitimatie deugt natuurlijk niet. De conclusie moet zijn: op deze manier hebben ze het al 15 jaar lang niet geleerd. Wat moet er nu gebeuren om deze leerlingen voor te bereiden op autonoom en adequaat handelen in de maatschappij, waar ze binnenkort hun weg zullen moeten vinden in lonen, huren, leningen, hypotheken, aflossingen, et cetera?

Rekenen/wiskunde

In reken- en wiskundeopgaven…
- gaat het om het maken van sommen en het komen tot antwoorden;
- zijn antwoorden goed of fout;
- kun je de opgaven of je kunt ze niet;
- gaat het om technieken en (formele) notaties.

Gecijferdheid

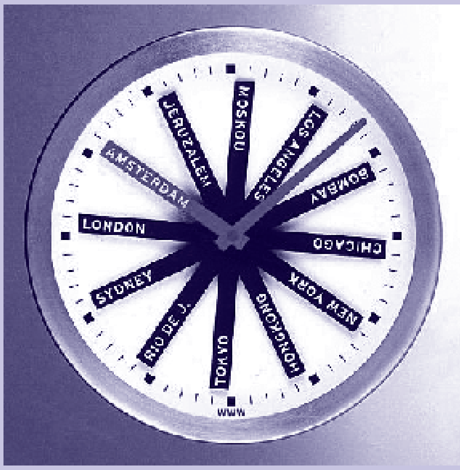
In gecijferdheidssituaties…
- gaat het om interpreteren (waar gaat het over?);
- gaat het om redeneren (wat moet ik hier mee?);
- gaat het om kritisch zijn (klopt het wel?);
- vorm je een mening of krijg je een impressie.

In realistische wiskunde voor de onderbouw en het vmbo en in wiskunde-A voor de bovenbouw van havo en vwo is het altijd ook een doelstelling geweest om te werken aan het rechterrijtje.
Als je kijkt wat er nu daadwerkelijk in lessen gebeurt, wordt 90% van de tijd besteed aan het maken van sommen en opgaven, aan het doen van bewerkingen, aan het komen tot antwoorden, en hoogstens 10%

Maar wat dan wel?

Welke activiteiten met leerlingen kunnen effectief zijn om ze goed voor te bereiden op de kwantitatieve kant van de maatschappij? Een paar vuistregels zijn wel te geven:
- Maak de reken- en wiskundesituaties zo realistisch mogelijk.
- Besteed veel aandacht aan dialoog met en tussen





FIGUUR 5

FIGUUR 6

leerlingen over aanpak, interpretaties en meningen.
- Maak leerlingen expliciet bewust van de vele kwantitatieve aspecten van de wereld rondom ons.

In de karakteristiek wiskunde voor de onderbouw staan de begrippen gecijferdheid en wiskundige geletterdheid expliciet genoemd. Vrijwel alle scholen zijn bezig om na te denken volgens welke scenario's zij die onderbouw willen vormgeven.

Ik zal enkele aanzetten geven voor gecijferdheidsactiviteiten in de onderbouw. Ik volg daarbij min of meer de scenario's voor de nieuwe onderbouw, zoals die geschetst zijn door de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming.

Scenario 1: Aandacht voor gecijferdheid

- Doe de GWA's uit het boek.
- Haal foldertjes en stukjes uit de krant de klas in als dat past bij het hoofdstuk.
- Besteed bij contextrijke opgaven vooral aandacht aan het terugkoppelen van de antwoorden naar de context.

Scenario 2: Gecijferdheid systematisch inzetten

- Zoek bij elk hoofdstuk één of meer voorbeelden van echt gebruik in het dagelijkse leven.
- Vervang hoofdstukken uit het boek door gecijferdheidsprojecten.
- Laat de leerlingen plaatjes verzamelen van gecijferdheidssituaties uit het dagelijks leven.

Scenario 3: Gecijferdheid van de leerlingen centraal stellen

- Integreer een groot stuk van gecijferdheidsactiviteiten in andere (beroepsgerichte) vakken.
- Haal ervaringen van leerlingen in kwantitatieve situaties de klas in en bespreek die met de leerlingen. Laat bijvoorbeeld een poster maken met allerlei gecijferdheidssituaties die de leerlingen echt hebben meegemaakt.
- Laat leerlingen foto's maken in en buiten de school van gecijferdheidssituaties.

Scenario 4: Gecijferdheid in het nieuwe leren

- Maak een aantal leerlijnen voor gecijferdheid en werk gericht aan de ontwikkeling van deze leerlingen op dit gebied.
- Analyseer de gecijferdheidsactiviteiten van leerlingen als ze werken aan complexe taken en prestaties en bespreek uw observaties met de leerlingen.
- Benoem een gecijferdheidscoach in het kernteam die leerlingen op het spoor zet van gecijferdheidsaspecten in hun taken en hen daarop feedback geeft.

Tot slot

U heeft in dit artikel nog niet veel uitgewerkte voorbeelden aangetroffen. Die zijn er ook nog niet zoveel. Ik verwacht echter dat er de komende jaren in de praktijk veel goede voorbeelden zullen ontstaan van manieren om leerlingen gemotiveerd en effectief te laten werken aan gecijferdheid. Zowel voor basisonderwijs, onderbouw voortgezet onderwijs, vmbo, bovenbouw havo/vwo en mbo.

Mijn intentie is dergelijke voorbeelden zo goed mogelijk te verspreiden via Euclides of via de website www.gecijferdheid.nl.

Maar ik houd me ook aanbevolen voor uw ervaringen.

Literatuur

- *Iddo Gal (ed.): Adult Numeracy Development - Theory, Research, Practice. Cresskill (NJ, USA): Hampton Press Inc. (2000).*
- *T. Goris: UniCe Wiskunde. In: Nieuwe Wiskrant, 24e jrg. nr.1. Utrecht: Freudenthal Instituut (2004).*
- *K. Hoogland, E. Jablonka: Wiskundige geletterdheid en gecijferdheid. In: Nieuwe Wiskrant, 23e jrg. nr.1. Utrecht: Freudenthal Instituut (2003).*
- *Organisation for Economics Co-operation and Development (OECD) (1999): Measuring Student Knowledge and Skills - A new Framework for Assessment. Parijs: OECD (1999).*
- *Taakgroep Vernieuwing Basisvorming: Basisvorming - Keuzes aan de school. Den Haag: Ministerie OCenW (2003).*

Website

- *www.gecijferdheid.nl*

Over de auteur

Kees Hoogland (e-mailadres: K.Hoogland@aps.nl) werkt op het APS in Utrecht. Hij is betrokken bij projecten rond reken- en wiskundeonderwijs in binnen- en buitenland. Hij doet promotieonderzoek op het gebied van gecijferdheid.

DOOR ONGHEHOORDE LICHTICHEYT

Simon Stevin propageerde in 'De Thiende' het gebruik van decimale breuken.

[Harm Jan Smid]



Een klein boekje

DE THIENDE, Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen. Onder die titel (zie figuur 1) publiceerde Simon Stevin in 1585 in Leiden een klein boekje van enkele tientallen pagina's. Hij belooft nogal wat! Nooit meer breuken nodig, en alle berekeningen die je maar nodig hebt voortaan heel gemakkelijk. Toch is het helemaal niet zo veel bijzonders, zegt hij zelf:
Maer wat sal dit voorghestelde doch sijn? Eenen wonderlicken diepsinnighen Vondt? Neen voorwaer.
Wat was het dan wel en wat wilde Stevin met dit boekje?

Rekenen met breuken

Het was geen boekje bestemd voor wiskundigen. Integendeel, Stevin richtte zich, zo blijkt uit zijn voorwoord, tot mensen die beroepshalve veel moesten rekenen, zoals landmeters, muntmeesters en kooplui. Die rekenden met oppervlakten, met geld, met lengtes en inhouden, in eenhedenstelsels die op allerlei manieren waren onderverdeeld. Die onderverdeling was vrijwel nooit decimaal. Bij hun berekeningen moesten ze breuken gebruiken. Wat het voor deze mensen nog eens extra ingewikkeld maakte, was dat er meerdere, lokaal verschillende, stelsels voor lengte-, inhoud- en gewichtmaten en geld- en muntstelsels in gebruik waren. Dat betekende dat er ook vaak omrekeningen tussen stelsels verricht moesten worden, en ook daarbij moest weer veel met breuken worden gerekend.
Het rekenen met *ghebrokenen*, breuken zoals wij nu zeggen, was daarom voor heel wat mensen een onvermijdelijk onderdeel van hun beroepspraktijk. Daar werden ze dan ook grondig in getraind. In de rekenboeken die vanaf de tweede helft van de 15e eeuw gingen verschijnen, en die speciaal voor kooplieden en dergelijke bedoeld waren, werd ruimschoots aandacht aan het rekenen met breuken besteed. Vereenvoudigen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken, het werd allemaal in die boeken behandeld en geoefend. Vervolgens werd die kennis dan in allerlei praktische situaties toegepast. Uitgelegd werden de behandelde regels niet: zó en zó moest je dat doen, liefst zonder fouten en ongetwijfeld graag een beetje vlug. Er was tenslotte veel geld mee gemoeid!
En al die moeite is, volgens Stevin, eigenlijk helemaal niet nodig. Je kunt het net zo goed zónder breuken doen. Door het positiestelsel een beetje uit te breiden kun je die moeilijke breuken vermijden. Wij zouden nu zeggen dat je decimale breuken moet gebruiken, maar zo zei Stevin het niet. Alleen hele getallen zijn nodig, zonder breuken. Als je maar afspreekt wat de cijfers waaruit die getallen zijn opgebouwd, precies betekenen. Dat is wat hij als de oplossing zag, en wat hij in zijn boekje propageerde. Want zo moet je zijn boekje zien: als een stukje

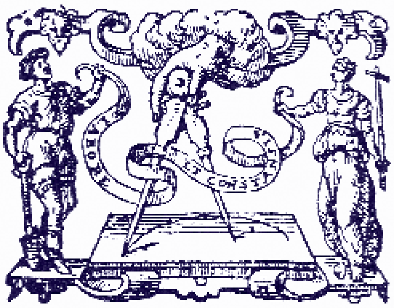
FIGUUR 1

DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen.

Beschreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*



TOT LEYDEN,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.

III. BEPALINGHE.

Ende elck thiendedeel vande eenheyt des BEGHINS, *noemen wy* EERSTE, *sijn teecken is* ①; *Ende elck thiendedeel vande eenheyt der Eerste, noemē wy* TWEEDE, *sijn teecken is* ②; *Ende soo voort elck thiendedeel der eenheyt van sijn voorgaende, altijt in d'oirden een meer.*

VER-

12 S. STEVINS

VERCLARINGHE.

ALS 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, dat is te seggen 3 *Eersten*, 7 *Tweeden*, 5 *Derden*, 9 *Vierden*, ende soo mochtmen oneyndelick voortgaen. Maer om van hare weerde te segghen, soo is kennelick dat naer luyt deser Bepalinge, de voornoemde ghetalen doen $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, t'samen $\frac{3759}{10000}$. Alsoo oock 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③, sijn weert 8 $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, dat is t'samen 8 $\frac{937}{1000}$ ende soo met allen anderen dier ghelijcke. Het is oock te anmercken, dat wy inde THIENDE nerghens gebroken getalen en ghebruycken: Oock dat het ghetal vande menichvuldicheyt der Teeckenen, uytghenomen ⓪, nummermeer boven de 9 en comt. By exempel, wy en schrijven niet 7 ① 12 ② maer in diens plaetse 8 ① 2 ②, want sy soo veel weert sijn.

FIGUUR 2 en 3

propaganda voor een manier van rekenen die onder wiskundigen in die tijd inmiddels bekend, maar daarbuiten nog vrijwel onbekend was. François Viète gebruikte in 1579 in zijn *Canon Mathematicus* als één van de eersten decimale breuken, en Stevin zal zijn werk wel gekend hebben. Maar Viète was vooral een belangrijk theoreticus (en overigens net als Fermat jurist en diplomaat van beroep en wiskundige in zijn vrije tijd), en met praktische toepassingen of het verbreiden van zijn resultaten onder een breder publiek hield hij zich niet bezig. En hoewel Stevin zeker ook als theoreticus niet zonder belang was, hechtte hij juist wel veel belang aan die praktische toepassingen en de verbreiding van kennis onder een breed publiek. De decimale breuken zijn dus zeker niet door Stevin uitgevonden, en dat beweerde hij zelf ook helemaal niet.

Wie was Stevin?

Stevin werd in 1548 geboren in Brugge. Van zijn jeugd en opleiding is niet zo veel bekend. Hij is klerk geweest in Antwerpen en Brugge, heeft vermoedelijk veel door Europa gezworven en duikt in 1581 op in Leiden, waar hij zich inschrijft in de daar enkele jaren tevoren opgerichte universiteit. In 1593 treedt hij in dienst van prins Maurits en adviseert hij hem over allerlei praktische problemen. Hij houdt zich bezig met zaken als vesting-, haven- en windmolenbouw. Als in 1600 aan de Leidse universiteit de *Duytsche Mathematique* wordt opgericht, een soort van hoger beroepsonderwijs, stelt Stevin de instructie voor die instelling op. Hij overlijdt in 1620 in Den Haag. Stevin wordt wel beschouwd als een van de eerste echte wetenschappelijke ingenieurs, als iemand die op een stevige wetenschappelijke basis werkte aan bruikbare oplossingen voor praktische problemen, en daarbij ook omgekeerd weer bijdraagt aan de ontwikkeling van de wetenschap zelf. Daarnaast is Stevin ook bekend gebleven door zijn ijveren voor het gebruik van het Nederlands binnen de wiskunde. Dat wij *wiskunde* zeggen en niet zoiets als *matematiek*, is aan Stevin te danken. Misschien is Stevin bij het grote publiek (nou ja, groot...) wel het meest bekend gebleven door zijn zeilwagen, voor hem vermoedelijk niet meer dan een aardigheidje.

Inhoud en karakter van *De Thiende*

De Thiende is zoals gezegd vooral een uitgebreid pamflet, waarin een bepaalde manier van rekenen wordt gepropageerd. Het is niet te vergelijken met de bekende rekenboeken uit die tijd, die werden gebruikt op de Franse scholen en bij de privé-lessen van de rekenmeesters. Dat waren behoorlijk omvangrijke boeken, waarin de gehele rekenkunde die voor kooplui van belang was werd behandeld, compleet met een groot aantal opgaven. *De Thiende* is veel beperkter van opzet en doel. Het bestaat uit twee delen: *Bepalinghen* en *Werckinghe*, bij elkaar 23 bladzijden op klein formaat. Daarna volgt nog een *Aenhangsel* van 14 bladzijden. Het boekje is duidelijk bedoeld voor volwassenen die al kunnen rekenen,

dat beroepshalve veel moeten doen, daarbij breuken moeten hanteren, en er bij gebaat zouden zijn als dat allemaal wat makkelijker ging. Opgaven om zelf te oefenen komen er niet in voor.

Het eerste deeltje waarin de decimale breuken worden uitgelegd bevat vier bepalingen, waarvan de derde het belangrijkste is, want daarin staat eigenlijke het hele idee. Ik citeer die bepaling hier volledig (zie ook figuur 2):
'Ende elck thiendedeel vande eenheyt des BEGHINS, noemen wy EERSTE, sijn teecken is [1]; Ende elck thiendedeel vande eenheyt der Eerste, noemen wy TWEEDE, syn teecken is [2]; Ende soo voort elck thiendedeel der eenheyt van syn voorgaende, altijt in d'oirden een meer.'[1]
In een *Verclaringhe* legt Stevin dan aan de hand van een voorbeeld uit wat dat betekent. Hij neemt het getal 3[1]7[2]5[3]9[4] en verklaart waarom dat gelijk is aan $\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{10000}$, "tsamen $\frac{3759}{10000}$". Zie figuur 3. Een ander aardig voorbeeldje:
'By exempel, wy en schrijven niet 7[1]12[2] maer in diens plaetse 8[1]2[2], want sy soo veel weert syn.'
Stevin gebruikte nog niet de decimale punt of komma, maar een duidelijk onhandiger notatie. Vermoedelijk ontleende hij die aan de Italiaan Bombelli, die een vergelijkbare notatie voor exponenten gebruikte. De decimale punt of komma kwam spoedig daarna in zwang, vooral door de invloed van Napier, de Schotse edelman die ook de logaritme bedacht. Napier stelde voor een punt of komma te gebruiken, maar helaas, sommige landen kozen voor de punt, andere voor de komma....

Daarna komt de *Werckinghe*. Daarin wordt het optellen, aftrekken delen en vermenigvuldigen van decimale breuken behandeld. Dat gaat steeds aan de hand van een concreet getalvoorbeeld (zie figuur 4[2]), dat ontleend is aan een ander rekenboekje van Stevin. In dat boekje gaat het om een 'gewoon' getal; hier worden dezelfde cijfers gebruikt maar is, om het in moderne taal te zeggen, de komma een paar plaatsen opgeschoven. Het voordeel is natuurlijk dat Stevin voor de uitleg van de berekening op zich naar zijn andere boekje kan verwijzen en zich hier op de gang van zaken 'achter de komma' kan concentreren. Opvallend is dat Stevin bij ieder voorbeeld niet alleen uitlegt hoe je de bewerking moet doen, maar die achteraf in een *Bewys* ook rechtvaardigt. Zoiets gebeurde in de gebruikelijke rekenboekjes niet. Maar zijn 'bewijs' is ook geen algemeen bewijs maar opgehangen aan het betreffende voorbeeld: hij laat zien dat het gevonden antwoord klopt door het ook nog eens met gewone breuken na te rekenen.

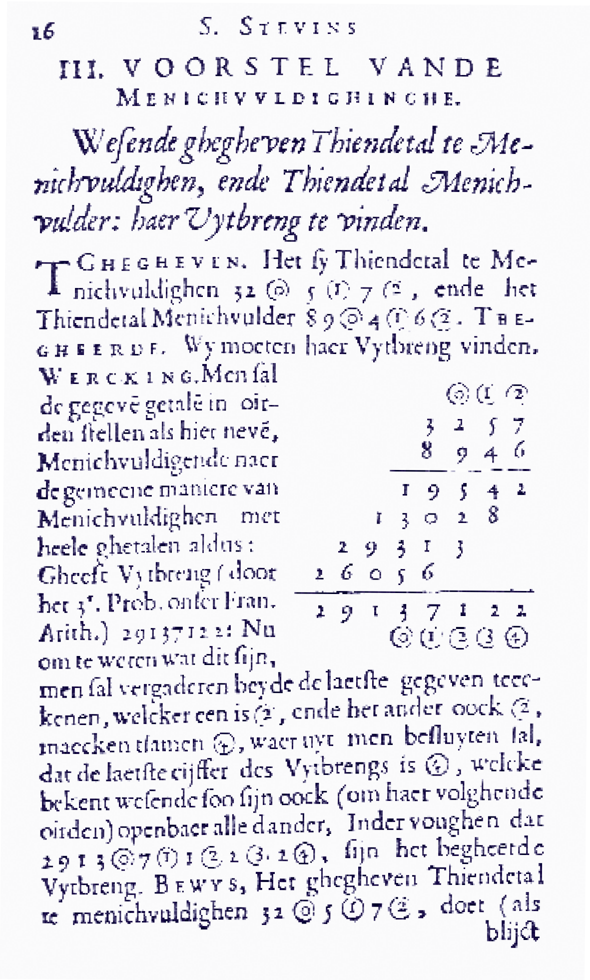
Naar een metriek stelsel?

In het *Aenhangsel* laat Stevin dan zien waarom het rekenen met decimale getallen zoveel makkelijker is (zie figuur 5[2]). Hij geeft voorbeelden van berekeningen voor een landmeter, voor een 'tapijtmeester', een 'lichaemmeter' (iemand die de inhouden van bijvoorbeeld van bier- of wijnvaten bepaalde), voor een 'sterrekijcker' en voor een 'muntmeester'.
Nu is er echter wel een probleem. Vrijwel geen maat- of muntstelsel was decimaal verdeeld. Om toch met decimalen te kunnen rekenen zou je bijvoorbeeld een hoeveelheid naar één maateenheid kunnen omrekenen, die dan als decimaal getal weergeven en daarmee verder kunnen rekenen. Een hoeveelheid graan van 3 lasten, 13 mudden, 1 zak en 30 schepels zou je dan kunnen uitdrukken in *mudden*, maar als je weet dat een last 27 mudden is, een mud 4 schepels is en een zak 3 schepels, dan is al snel duidelijk dat dat nog niet zo simpel is. Bovendien loop je dan al snel tegen repeterende decimale breuken aan, een onderwerp dat Stevin niet aanroert. Een oplossing kan zijn alles naar de kleinste eenheid om te rekenen. Stevin stelt wat anders voor. Hij suggereert eigenlijk die oude eenhedenmaten te vergeten en een decimaal metriek stelsel in te voeren, waarin iedere eenheid zonodig weer in 10 kleinere eenheden wordt verdeeld, en dus de getallen achter de komma direct met de onderverdelingen van de eenheid corresponderen. Hij gaat zelfs zover dat hij voorstelt de indeling van de cirkel in 360 graden af te schaffen en te vervangen door een decimale verdeling. Als je nu direct daarmee aan het meten en rekenen gaat, wordt inderdaad alles veel eenvoudiger. En als de eigenaar van het land nu graag in oude maateenheden wil weten hoe groot zijn stuk land is, dan reken je je resultaat gewoon weer even terug in de oude eenheden.
Dat zou misschien bij het landmeten, waar de landmeter zelf zijn opmetingen verricht, of voor de astronoom, nog wel kunnen. Maar in de koophandel, of bij het geldrekenen, waarbij je bepaalde hoeveelheden of bedragen in de bestaande stelsels krijgt geleverd en opgegeven, kan dat natuurlijk niet zomaar.

Het gelijk van Stevin

Stevin had gelijk, maar kreeg het voorlopig niet. Je kunt het in theorie heel goed doen zonder breuken. Daar zit echter, zoals hiervoor al bleek, wel een voorwaarde aan vast: je moet eigenlijk ook overstappen op een decimaal metriek stelsel. Gebeurt dat niet, dan blijf je vastzitten aan het werken met breuken, ook al kun je ze dan bij sommige berekeningen omzeilen.
En van de invoering van zo'n decimaal positiestelsel was natuurlijk geen sprake. Dat kwam pas ruim tweehonderd jaar later aan de orde. Daarmee werd Stevins bewering dat je met zijn methode het werken met breuken kon vermijden, in de praktijk een slag in de lucht. Misschien heeft menige *Lichaemmeter* of *Sterrekycker* die Stevins boekje kocht en hoopte daarmee van een hoop ellende af te zijn, zich wel bekocht gevoeld. Voorlopig kon Stevin zijn pretenties niet waar maken.
In de dagelijkse praktijk speelden decimale breuken voorlopig geen rol van betekenis. Hét rekenboek van de 17e en 18e eeuw, de *Cijfferinghe* van Willem Bartjens, waarvan de eerste druk verscheen in 1604, behandelde dan ook helemaal geen decimale breuken, maar ging met ouderwetse uitvoerigheid en

FIGUUR 4



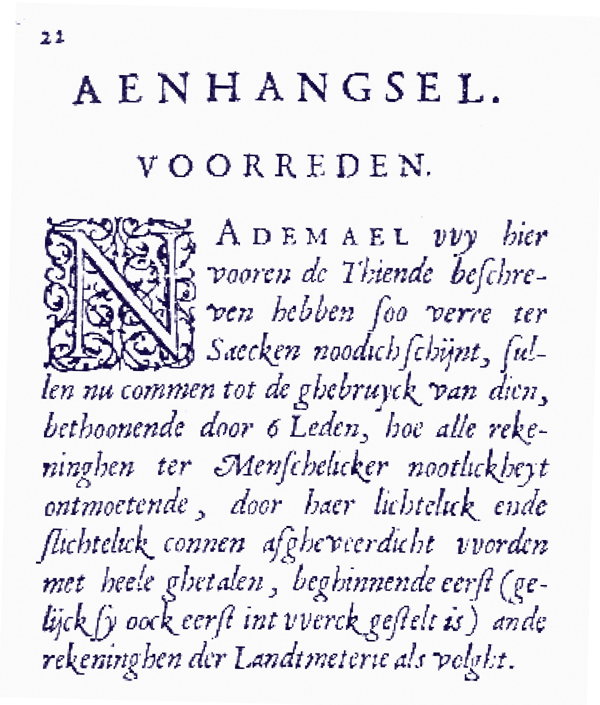
16 S. STEVINS

III. VOORSTEL VANDE MENICHVVLDIGHINGHE.

Wesende ghegheven Thiendetal te Menichvuldighen, ende Thiendetal Menichvulder: haer Vytbreng te vinden.

T GHEGHEVEN. Het sy Thiendetal te Menichvuldighen 32 ⓪ 5 ① 7 ②, ende het Thiendetal Menichvulder 89 ⓪ 4 ① 6 ②. TBEGHEERDE. Wy moeten haer Vytbreng vinden. WERCKING. Men sal de gegevē getalē in oirden stellen als hier nevē, Menichvuldigende naer de gemeene maniere van Menichvuldighen met heele ghetalen aldus: Gheeft Vytbreng (door het 3e. Prob. onser Fran. Arith.) 29137122: Nu om te weten wat dit sijn, men sal vergaderen beyde de laetste gegeven teeckenen, welcker een is ②, ende het ander oock ②, maecken tsamen ④, waer uyt men besluyten sal, dat de laetste cijffer des Vytbrengs is ④, welcke bekent wesende soo sijn oock (om haer volghende oirden) openbaer alle dander, Inder voughen dat 2913 ⓪ 7 ① 1 ② 2 ③ 2 ④, sijn het begheerde Vytbreng. BEWYS, Het ghegheven Thiendetal te menichvuldighen 32 ⓪ 5 ① 7 ②, doet (als blijct

```
                ⓪ ① ②
             3  2  5  7
             8  9  4  6
          ---------------
          1  9  5  4  2
       1  3  0  2  8
    2  9  3  1  3
 2  6  0  5  6
 ------------------------
 2  9  1  3  7  1  2  2
             ⓪ ① ② ③ ④
```



21

AENHANGSEL.

VOORREDEN.

NADEMAEL *vvy hier vooren de Thiende beschreven hebben soo verre ter Saecken noodich schijnt, sullen nu commen tot de ghebruyck van dien, bethoonende door 6 Leden, hoe alle rekeninghen ter Menschelicker nootlickheyt ontmoetende, door haer lichtelick ende slichtelick connen afghevveerdicht vvorden met heele ghetalen, beghinnende eerst (gelijck sy oock eerst int vverck gestelt is) ande rekeninghen der Landtmeterie als volght.*

FIGUUR 5

degelijkheid in op het rekenen met gewone breuken. Dat was ongetwijfeld voorlopig in de dagelijkse praktijk hard nodig. Het is dan ook maar de vraag of de vaak gedane bewering dat door *De Thiende* de decimale breuken algemene en brede bekendheid kregen, wel opgaat. De meeste mensen kregen er niet mee te maken. Want net zoals je nu ‘gewone’ breuken in het dagelijks leven bijna niet nodig hebt, net zo goed kon je in het dagelijks leven van een paar eeuwen terug met decimale breuken maar weinig beginnen. De kennis van decimale breuken zal daarom toch wel tot een kleine kring beperkt zijn gebleven. Dat veranderde in Nederland pas na 1820, toen op last van koning Willem I in Nederland het metrieke stelsel verplicht werd ingevoerd. Dat stelsel moest ook op alle scholen worden onderwezen. Het aardige is, dat Stevins pleidooi voor een decimaal metriek stelsel toen alsnog van stal werd gehaald. Het metrieke stelsel dat Willem I verplicht stelde, was immers afkomstig van de net daarvoor verdreven Fransen, en misschien ook al om die reden niet erg populair. Gelukkig kon er op gewezen worden, dat het hier toch eigenlijk een Nederlands idee was, al meer dan 200 jaar geleden bedacht.

Toen eenmaal het metrieke stelsel werd ingevoerd en onderwezen moest worden, werd ook opeens de kennis van decimale breuken veel belangrijker. Vanaf die tijd worden decimale breuken dan ook een vast onderwerp in de rekenboekjes. En toen in 1828 in een rekenboekje voor de Leidse onderwijsinstelling *Mathesis* de gewone breuken volgens de traditie vóór de decimale werden behandeld, vroeg een recensent zich af:

’Alleen heeft het ons verwonderd, dat de kundige Schrijvers, de meer moeielijke gewone vóór de meer gemakkelijke tiendeelige behandelen. Het komt ons voor dat de tientallige breuken gemakkelijker uit de gegevene theorie der getallen worden afgeleid, en de onderscheidene bewerkingen derzelve den leerling veel lichter vallen.’

Daar zou Stevin het vast mee eens geweest zijn. En wat zou de zakrekenmachine daar niet een prachtig didactisch hulpmiddel bij kunnen zijn. Zonder begrip van decimale breuken heb je niets aan zo’n ding, maar met zo’n apparaat is het werken met decimale breuken pas echt een kwestie van *onghehoorde lichticheyt!*

Noten

[1] Stevin gebruikte voor de decimale notatie geen rechte haken maar cirkeltjes; zie figuur 3.

[2] (red.) Zie verder ook de website van Geer Hoppenbrouwers: Simon Stevin’s De Thiende en vertalingen (http://home.wxs.nl/~hopfam/ThiendeMenu.html).

Over de auteur

Harm Jan Smid (e-mailadres: H.J.Smid@ewi.tudelft.nl) is werkzaam aan de TU Delft. Zijn bijzondere belangstelling gaat uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. Hij promoveerde op een proefschrift over het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw en is lid van de redactie van de Rekenmeesters-serie.

REKENEN EN ALGEBRAÏSCHE VAARDIGHEDEN

[Rob Bosch]

In(aan)leiding

Sinds enige jaren constateer ik in mijn colleges aan de KMA dat veel studenten zelfs de meest elementaire algebraïsche vaardigheden niet meer beheersen. Bij de bespreking van de substitutiemethode voor integralen loopt het spaak omdat studenten menen dat

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

Van complexe getallen zeggen ze niets meer te begrijpen als hun berekening $(2 + 3i)^2 = 4 + 9i^2 = 4 - 9 = -5$ niet juist blijkt te zijn.
Bovendien worden berekeningen nogal eens ontsierd door soms wel en soms niet te achterhalen rekenkronkels als

$$2^3 = 6\,,\ \frac{8}{\frac{1}{2}} = 4\,,\ 21^2 = 401 \ \text{ en } \ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$$

Om de gemaakte fouten duidelijk te maken, schrijf ik een rekensommetje op het bord. Voor de bovenstaande missers zouden dit de volgende sommen kunnen zijn.

$$\frac{80}{2+8}=\frac{80}{2}+\frac{80}{8}=50$$

$$7^2=(5+2)^2=5^2+2^2=29$$

Meestal begrijpt de student direct dat zijn berekening of redenering niet deugt, maar dat betekent nog niet dat hij dan weet hoe het wel moet. Iedere keer als zo'n algebraïsche misser opduikt, maak ik in het college wat tijd vrij om aan de hand van de gepresenteerde rekenopgaven de bijbehorende algebraïsche regeltjes te bespreken en te oefenen. De oefening van de besproken regel maakt daarna ook deel uit van de huiswerkopdrachten.

Een andere goede gelegenheid om aandacht te schenken aan de algebraïsche basisregels doet zich voor als ik tot ongeloof van de studenten het antwoord van een eenvoudige rekenopgave ogenschijnlijk zonder enige vorm van berekening op het bord zet. Van mijn kennis van integralen, differentiaalvergelijkingen en Laplace-transformaties zijn de studenten niet erg onder de indruk, maar als ik zonder een rekenmachine (ik bezit niet zo'n apparaat) eenvoudige rekensommetjes uit mijn hoofd of met een enkele tussenstap uitreken, is men zichtbaar enthousiast. Dat ik telkens weer de rekenmachine versla, dwingt binnen de groep respect af. Steevast wordt mijn uitkomst van sommetjes als 24×32 en 27^2 met de rekenmachine gecontroleerd. Instemmend geknik en een flauwe lach als de op het bord verschenen uitkomst klopt. Bij de studenten bestaat het vermoeden dat ik voor tal van sommen een rekentrucje heb geleerd. Als ik dan opmerk dat ik slechts een paar eenvoudige maar wel fundamentele regels hanteer, word ik duidelijk niet geloofd. Er *moet* wel een trucje voor zijn, is de algemene opvatting.

De distributieve eigenschap

Zoals gezegd vinden studenten het uit het hoofd uitrekenen van 24×32 en 87×23 een mysterie. De eerste regel die we bespreken en die het mysterie verklaart, is de distributieve eigenschap die we vaak onbewust gebruiken in trucjes als: bij 19×34 doen we eerst 20×34 waarna we er 34 van aftrekken. In letters luidt deze eigenschap:

$$a(b+c)=(b+c)a=ab+ac \quad \text{(distributieve eigenschap)}$$

Ter illustratie een rekensom:
$28\times53=(20+8)\cdot53=1060+424=1484$
De enige 'moeilijkheid' bij deze berekening is 8×53, wat we distributief weer kunnen doen als 8×50 en 8×3. Na een aantal voorbeelden komen de studenten er achter dat het 'rekenwonder' slechts sommetjes onder de maakt. Dat men na enkele voorbeelden begrijpt hoe de distributieve eigenschap bij vermenigvuldigen werkt, blijkt als ook andere splitsingen van de factoren worden voorgesteld.
Een aantal studenten vinden de volgende splitsing handiger:
$28\times53=28\cdot(50+3)=1400+84=1484$
Vermenigvuldigen met 50 en alleen 3×28 hoeven uitrekenen vinden ze eenvoudiger dan de vorige berekening. Het volgende voorstel is:
$28\times53=(30-2)\cdot53=1590-106=1484$
Omdat aftrekken iets lastiger is dan optellen vindt men dit geen verbetering. Maar zo kan het natuurlijk wel, want er geldt ook:

$a(b-c)=(b-c)a=ab-ac$ (distributieve eigenschap)

We maken hierna nog een aantal lettersommetjes met de distributieve eigenschap. Tot de huiswerkopdrachten behoort vervolgens een paragraaf met een groot aantal oefenopgaven over de distributieve eigenschap.

Een merkwaardig product

Op het bord verschijnen regelmatig kwadraten. Bijvoorbeeld bij de berekening van de modulus van een complex getal en bij het bepalen van de norm van een vector:

$$|7+13i|=\sqrt{7^2+13^2}$$

$$|(12,6,18)|=\sqrt{12^2+6^2+18^2}$$

De antwoorden op deze opgaven schrijf ik meestal met een enkele tussenstap - maar zonder rekenmachine - op het bord. De studenten willen weten welke 'truc' hier nu weer achter steekt. Dit geeft aanleiding tot het bespreken van het volgende merkwaardige product:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (merkwaardig product 1)

We berekenen $27^2=(20+7)^2=400+280+49=729$.
De som $a^2 + b^2$ is bij een dergelijke opgave direct op te schrijven, want de kwadraten van getallen onder de 10 kennen we wel. Bij het bovenstaande kwadraat schrijven we dus direct op 449. Daar moet het *dubbele product* 280 dan nog bij. Weer constateert het gehoor dat ik dus slechts sommetjes onder de 10 maak. We oefenen nog enkele kwadraten:
$39^2=(30+9)^2=900+540+81=981+540=1521$
$52^2=(50+2)^2=2500+200+4=2504+200=2704$
Al snel stellen een aantal studenten een splitsing van het grondtal voor met een minteken. Voor 39^2 bijvoorbeeld betekent dit:
$39^2=(40-1)^2=1600-80+1=1521$
Dit gaat nog sneller dan de eerste splitsing. De regel is natuurlijk:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (merkwaardig product 2)

We oefenen het merkwaardig product nog met letters, waarna een hoofdstukje merkwaardig product wordt toegevoegd aan de huiswerkopdrachten complexe getallen.
Bij de bespreking van de huiswerkopdrachten zijn er nog enkele vragen maar ik constateer dat niemand meer het dubbele product vergeten is.
Interessant is dat een student opmerkt dat kwadraten in de 50 wel heel eenvoudig zijn. Bij bijvoorbeeld 56^2 zijn de eerste twee cijfers van het antwoord $25 + 6 = 31$ en de laatste twee cijfers $6^2 = 36$, hetgeen het juiste antwoord 3136 geeft. Mooie 'truc', maar ik houd niet van Hans Kazan-wiskunde, dus is gebruik alleen toegestaan als hij op basis van de basisregels een goede verklaring kan geven. Hetgeen hij tot enthousiasme van mij en zijn collega's netjes doet (buiten haakjes halen, hadden we in verband met de distributieve eigenschap al uitvoerig geoefend):
$(50+a)^2=2500+100a+a^2=(25+a)\cdot 100+a^2$
Naar aanleiding van deze ontdekking merkt een geïmponeerde student op of er nog meer van zulke trucs bekend zijn. Ik vertel hem dat je, uitgaande van de basisregels, ongetwijfeld nog een aantal van dit soort trucjes kunt afleiden. Ter illustratie geef ik hem de volgende snelle rekenwijze, die ik mij om de een of andere reden nog herinner.
$45^2=40\times 50+25=2025$
en
$75^2=70\times 80+25=5625$
Opdracht aan de studenten: leg deze 'truc' uit aan de hand van de basisregels. Het volgende college presenteerde een groepje studenten de volgende verklaring:
$(a+5)^2=a^2+10a+25=a(a+10)+25$
en aangezien a een tiental is werkt het.
Ongetwijfeld zijn dit 'rekentrucjes' die al in meerdere boeken beschreven zijn, maar het is opmerkelijk hoe snel en eenvoudig je deze trucjes met enige basisregels kunt herontdekken.

Nog een merkwaardig product

Bij een van de eerste colleges complexe getallen komt de deling van twee complexe getallen aan de orde.

$$\frac{2+3i}{1+2i}=\frac{2+3i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{8-i}{5}=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i$$

Een berekening die nogal wat algebraïsche vaardigheden vereist. Bijna niemand begrijpt wat hier gebeurt, zeker niet de studenten die zich afvragen waarom er niet 'gewoon' $2+\frac{3}{2}$ uitkomt. Dus maar weer een merkwaardig product behandeld:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (merkwaardig product 3)

Een rekenopgave:
$72\times 68=(70+2)(70-2)=4900-4=4896$
Dit gaat wel erg snel, dus we maken nog een aantal van dit type sommetjes. De student die vooraf dacht dat er 4900 uit zou komen, is enigszins verrast. Mijn opmerking dat het antwoord toch echt op een 6 moet eindigen wordt wel begrepen, maar men heeft hier nooit zo bij stilgestaan. Dit is misschien een beetje flauw, omdat het hier gaat om een specifiek soort opgave, maar het is wel leuk dat een aantal studenten na enige oefening met dit merkwaardig product opmerkt, dat deze regel ook gebruikt kan worden voor het berekenen van kwadraten. Ter illustratie geven zij het volgende voorbeeld:
$27^2=27^2-3^2+3^2=(30\times 24)+9=729$
Naar aanleiding van deze observatie ontstaat er een bijna filosofische discussie over welk merkwaardig product nu het beste kan worden gebruikt bij het snel uitrekenen van kwadraten.
Volgens minstens één student valt deze discussie beslist ten gunste uit van het tweede merkwaardige

product, want in zijn tentamen lineaire algebra kwam ik de volgende berekening tegen:

$$|(13,22,27) = \sqrt{13^2 - 3^2 + 22^2 - 2^2 + 27^2 - 3^2 + 9 + 4 + 9}$$
$$= \sqrt{160 + 480 + 720 + 22}$$
$$= \sqrt{1382}$$

Uiteraard wordt ook dit merkwaardig product weer uitvoerig geoefend, temeer daar het bij de complexe getallen en tal van andere berekeningen een rol speelt. Een grote serie oefenopgave wordt enthousiast en bijna foutloos gemaakt.

De algebraïsche vaardigheden oefenen we omdat ze noodzakelijk zijn voor het werken met complexe getallen, integralen, transformaties etc. De reken-sommetjes dienen slechts ter illustratie van een aantal basisregels en zijn geen doel op zichzelf, al is een goede rekenvaardigheid natuurlijk nooit weg. Na verloop van tijd ontstaat er bij de studenten een houding waarbij men niet meer te pas en te onpas naar de rekenmachine grijpt. Het uitrekenen van 12 × 17 op de machine wordt zelfs enigszins gênant gevonden. Rekenen vinden ze best leuk, vooral die ene keer toen we geheel onverwacht een aardig rekentrucje ontdekten.

Onze rekentruc

Als onderdeel van een opgave moeten we 978 × 992 uitrekenen. De rekenmachine is hier natuurlijk erg welkom. Nadat ik van een student het antwoord heb gekregen, vraagt deze zich af hoe ik dat zonder machine zou doen. Onder elkaar zetten en vervolgens op de klassieke manier uitrekenen gaat uiteraard altijd, maar ik zie een mogelijkheid om de opgave iets te vereenvoudigen. Het eerste argument is dat we er met 1000 × 992 = 992000 niet zover naast zitten. Uiteraard hebben we 22 × 992 teveel; dat moet er nog af. Iemand merkt nu op dat 22 × 992 ongeveer gelijk is aan 22 × 1000 = 22000. Voor de uitkomst van de oorspronkelijke opgave hebben nu dus 992000 – 22000 = 97000. We zien nu gemakkelijk in dat we er nog 22 × 8 = 176 naast zitten. Als we 176 bij het tussenantwoord optellen, vinden we het juiste antwoord, 970176. We, docent en studenten, zijn enigszins verrast dat we zo snel het antwoord vinden en proberen nog een soortgelijke opgave. Vervolgens schrijven we de berekening nog eens overzichtelijk op.

$$1000 \times 992 = 992000$$
$$1000 \times 22 = 22000$$
$$1000 \times 970 = 970000$$
$$22 \times 8 = 176$$
$$978 \times 992 = 970:176$$

Uit de bovenstaande berekening zien we dat we de laatste drie cijfers van het antwoord direct kunnen opschrijven. Deze drie cijfers zijn namelijk de uitkomst van 22 × 8, het product van de verschillen met 1000 van respectievelijk 978 en 992. De eerste drie cijfers van het antwoord zijn 992 – 22 = 978 – 8 = 970. Deze cijfers vinden we door van 992 het verschil van 1000 en 978 af te trekken. Bij dit soort opgaven dicht bij de 1000 kunnen we het antwoord blijkbaar zo opschrijven:

$$989 \times 991 = (989 - 9):11 \times 9 = 980:099$$

Uiteraard gaan we nog na wat hier achter steekt en welke basisregels we gebruiken.

$$(1000 - a)(1000 - b) = 1000^2 - 1000a - 1000b + ab$$
$$= 1000(1000 - a - b) + ab$$
$$= 1000((1000 - a) - b) + ab$$

Zoals we zien is onze 'truc' niet meer dan de distributieve eigenschap. Een student merkt nog op dat onze truc ook moet werken voor producten van getallen dicht bij 100. En uiteraard is dat juist.

$$97 \times 85 = (85 - 3):3 \times 15 = 82:45$$

De bovenstaande truc zal ongetwijfeld in een aantal boeken te vinden zijn, maar het is toch leuk om zoiets per ongeluk weer te ontdekken.

Tot slot

Zoals in de inleiding gezegd, merk ik regelmatig dat studenten afhaken bij de colleges complexe getallen, integratietechnieken en Laplace-transformaties, omdat ze door een gebrek aan algebraïsche vaardigheden afleidingen niet kunnen volgen en opgaven niet kunnen maken. Het gebrek aan deze vaardigheden speelt ook collega's van andere vakken parten. Zij constateren bijvoorbeeld dat studenten geen vervangingsweerstanden (impedanties) meer kunnen bepalen en grote moeite hebben met het berekenen van traagheidsmomenten.
Enige tijd geleden heb ik daarom een oefen-programma basisvaardigheden opgezet.
Rekenopgaven kunnen daarbij dienen als illustratie van gemaakte fouten en kunnen tevens het vertrek-punt zijn voor een bespreking van de basisregels. Zoals reeds opgemerkt gaat het hierbij *niet* om het aanleren van rekentrucjes, maar wél om te laten zien dat de basisregels ook bij het *rekenen* van toepassing zijn. Dat laatste is voor veel studenten een openbaring, want rekenen is toch dat vak van de basisschool, en wiskunde begint op de middelbare school toch vanaf nul.
Ik constateer sinds de opzet van het oefenprogramma een aanzienlijke verbetering van de vaardigheden (breuken blijven lastig), maar vooral merk ik dat men zowel het rekenen als het oefenen van de basisvaardigheden met plezier en enthousiasme doet. We oefenen nog een tijdje en dan komen we er wel, reken maar!

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

CWI-ONDERZOEKER VAN RAALTE LAAT COMPUTERS SLIMMER REKENEN

[Fedde van der Lijn]

Proefschrift

Als je sneller wil rekenen met je computer, kun je een betere processor en meer geheugen kopen. Maar je kunt ook slimmer rekenen. Marc van Raalte, onderzoeker aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), werkte aan methodes die wiskundige functies op een handige manier benaderen. Berekeningen aan bijvoorbeeld lucht- en vloeistofstromen of de verspreiding van warmte verlopen hierdoor sneller en worden nauwkeuriger. Op 6 december promoveerde hij aan de Universiteit van Amsterdam; de titel van zijn proefschrift is *Multigrid Analysis and Embedded Boundary Conditions for Discontinuous Galerkin Discretization*.

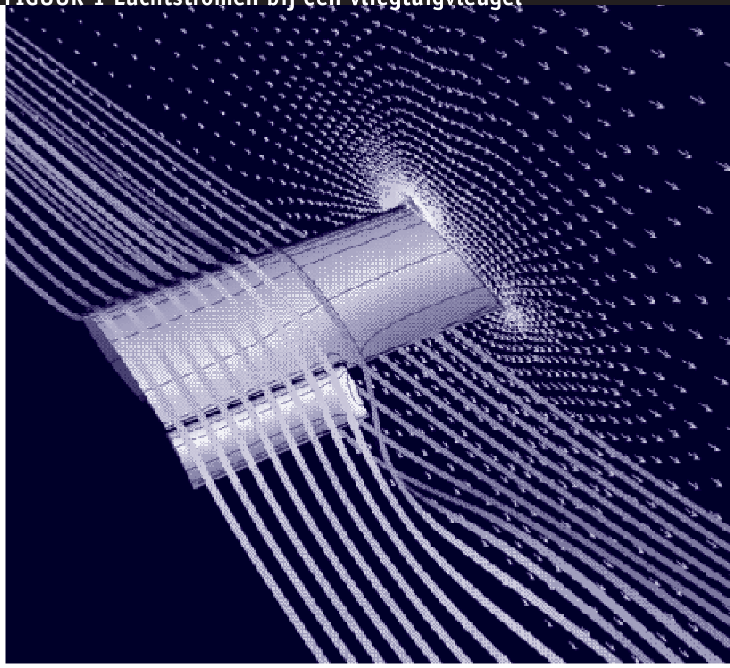
Benaderen

Wiskundigen zijn dol op partiële differentiaalve rgelijkingen (PDV's). In de eerste plaats omdat ze overal voorkomen in wetenschap en techniek. De verspreiding van warmte in een pan, de luchtstroom langs een vliegtuigvleugel of het elektrisch veld van een antenne, allemaal worden ze beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen. Oplossingen van een PDV zijn functies, bijvoorbeeld een uitdrukking voor de druk rond een scheepsromp. Meestal is het onmogelijk om deze functie exact te vinden. In plaats daarvan proberen wiskundigen hem te benaderen.

Lappendeken

Een van de beste strategieën voor een goede benadering is de zogeheten eindige elementen methode. Bij deze techniek wordt het gebied rond de scheepsromp eerst opgedeeld in een rooster van kleinere cellen. Vervolgens wordt de oplossing van de PDV voor al die cellen apart benaderd door een benaderingsfunctie. Wiskundigen hebben in de afgelopen eeuwen allerlei oplossingstechnieken ontwikkeld die deze functies in een zo klein mogelijk aantal stappen kunnen vinden. Het resultaat is een soort lappendeken van benaderingsfuncties die samen een grote aaneengesloten benadering vormen van de oplossing van de PDV. Kleinere 'lapjes' en complexere benaderingsfuncties geven een betere benadering van de oplossing, maar kosten meer tijd en geheugen. De grote uitdaging is om nieuwe technieken te vinden waarmee eindige elementen benaderingen sneller kunnen worden berekend. Van Raalte heeft als eerste een manier gevonden om twee van deze technieken, discontinue Galerkin-methodes en multirooster-algoritmes, te combineren. Afzonderlijk functioneren ze prima, maar een manier om de technieken goed te laten samenwerken bestond nog niet. Ook heeft Van Raalte een nieuwe methode ontwikkeld om benaderingen te maken voor rekengebieden met kromme randen, bijvoorbeeld vliegtuigvleugels. Dankzij deze twee verbeteringen kunnen berekeningen aan PDV's sneller verlopen. De Universiteit van Michigan, het Lawrence Livermore National Laboratory en de NASA in de Verenigde Staten hebben belangstelling getoond voor Van Raaltes werk[1].

FIGUUR 1 Luchtstromen bij een vliegtuigvleugel



Noot

[1] (red.) Zie verder ook Kennislink: www.kennislink.nl/web/show?id=124136

Over de auteur

Fedde van der Lijn (e-mailadres: Fedde.van.der.Lijn@cwi.nl) is wetenschapsvoorlichter bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica, het nationale onderzoeksinstituut voor wiskunde en informatica in Amsterdam (zie www.cwi.nl).
Het CWI is gelieerd aan de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

Boekbespreking / De Cijfferinghe (1604) van Willem Bartjens

Een facsimile-uitgave van het rekenboek van de beroemde schoolmeester, ingeleid door Danny Beckers en Marjolein Kool, uitgebracht als deel 2 in de serie 'Rekenmeesters'.

Uitgeverij Verloren, Hilversum (2004) isbn 90 6550 811 2 prijs: € 20,00 (284 blz.)

[Chris van der Heijden]



Uitgave

Tot de erflaters van onze beschaving behoren niet uitsluitend beroemdheden zoals Simon Stevin, Johan de Witt of Christiaan Huygens, rekenmeesters of wiskunstenaars van grote betekenis, maar ook mindere grootheden. De serie *Rekenmeesters* beoogt met facsimile-uitgaven juist van laatstgenoemden het werk weer tot leven te roepen. Deel 2 in deze serie is gewijd aan de schoolmeester Willem Bartjens. Zijn grote invloed op het rekenonderwijs is nog steeds terug te vinden in het tot de Nederlandse taalschat behorende gezegde 'volgens Bartjens'. Er is gekozen voor de eerste uitgave van *De Cijfferinghe*, nu 400 jaar geleden. Van dit verloren gewaande boek is in het jaar 2004 nog één exemplaar teruggevonden in de Stadsbibliotheek van Antwerpen. De facsimile-uitgave wordt ingeleid met 6 hoofdstukken. Een heruitgave van deel 1 (1633) en deel 2 (1636) van de *Vernieuwde Cijfferinge* zou misschien meer voor de hand gelegen hebben, omdat deze een vollediger beeld geven van het rekenonderwijs volgens Bartjens. De *Vernieuwde Cijfferinge* is echter volgens de inleiders in iedere bibliotheek te vinden. Omdat zij zich in hun commentaar niet tot de eerste editie van *De Cijfferinghe* beperken, maar in hoofdstuk 5 van de inleiding ook verwijzen naar *Vernieuwde Cijfferinge*, doet de lezer er verstandig aan om naar de bibliotheek te stappen.

Praktisch gericht

Om de historische context van *De Cijfferinghe* te begrijpen worden in hoofdstuk 3 van de inleiding de onderwijstypen in de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden besproken en in hoofdstuk 4 het wiskundeaandeel daarin. Hoofdstuk 5 geeft een directe toelichting op *De Cijfferinghe*. Dit is ook wel nodig gezien het taalgebruik.

De eerste editie van *De Cijfferinghe* kwam op het juiste moment uit, aan het begin van de Gouden Eeuw. De Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden ontwikkelde zich tot een machtige handelsnatie in Europa, gestimuleerd door de oprichting van de VOC. Een goede rekenaar maakte kans op een goede baan. Bartjens speelde hierop in. Zijn rekenonderwijs was dan ook bijna uitsluitend praktisch gericht, vandaar dat zijn boeken vooral gebruikt werden op de Fransche en Duytsche school en niet op de Latijnsche school. De hoofdmoot van *De Cijfferinghe* bestaat uit handelsrekenen en financiële rekenkunde. De berekeningen omvatten onder meer het omrekenen van munten, maten en gewichten en alles wat met het geldverkeer en de goederenstroom te maken heeft. In een bijlage worden de door Bartjens gebruikte munteenheden, maten en gewichten opgesomd; het zijn er 72. Het begrip evenredigheid speelt hierbij een centrale rol, de regel van drieën, oftewel *'regel de tri hoe ghe onghemeeten doet uut dry getaelen tvierde weten'* (rekenmeester Peter van Halle, 1568). Dit alles wordt gepresenteerd in de vorm van recepten die met een groot aantal opgaven ingeslepen worden *als de schaepen doen die haer ghegeten gras herknauwen.*

Rekenkunde als voorbereiding op de wiskunde speelt nauwelijks een rol. Aan de orde komen het algoritme van Euclides om gemeenschappelijke delers bij breuken op te sporen, en in de *Vernieuwde Cijfferinge* de som van rekenkundige en meetkundige reeksen, kwadrateren, machtsverheffen en worteltrekken. *Questien uut ghenouchten* komen slechts sporadisch voor of het moest zijn de afrekening na drinkgelagen. *De Cijfferinghe* wordt afgesloten met een magisch vierkant van 3 bij 3.

In het voorbijgaan komen we veel te weten over het schoolsysteem ten tijde van Bartjens. De meester staat centraal en legt veel uit. Vervolgens werken de leerlingen, selectief naar eigen behoefte, in verschillend eigen tempo de vraagstukken uit het boek door. Een klas kon soms meer dan 100 leerlingen bevatten, maar er waren gelukkig hulpmeesters.

150 jaar lang toonaangevend

Vanaf 1750 komen onder invloed van de Verlichting modernere rekenboeken in zwang, meer gericht op inzicht en een logische structuur. Met de invoering

van het metrieke stelsel aan het begin van de 19e eeuw vervalt de basis van *De Cijfferinghe* en komt er feitelijk een einde aan de leerboeken van Bartjens. Intussen zijn er dan wel ongeveer 100 herdrukken verschenen. Willem Bartjens heeft daarom zijn sporen verdiend in het rekenonderwijs.

Geschiedschrijving

Het zou voldoende geweest zijn als de inleiders zich hadden weten te beperken tot feitelijke gegevens over de persoon Bartjens en de direct op de context, de inhoud en het lot van *De Cijfferinghe* betrekking hebbende hoofdstukken 4, 5 en 6.
Hoofdstuk 1 bestaat echter meer uit fictie dan uit feiten, omdat van het leven van Bartjens niet veel bekend is. De literair bedoelde opmaat van dit hoofdstuk doet ongewild komisch aan. Mijn hoofdbezwaar is echter dat de inleiders zich opwerpen als historici, wat ze niet zijn. Dit betreft vooral hoofdstuk 2 van de inleiding, maar ook andere hoofdstukken. Wat is het belang van de beschrijving van een schutterij? Is het geschil over de predestinatieleer tussen de Remonstranten en Contraremonstranten en het feit dat Bartjens geen belijdenis gedaan heeft, van belang voor het rekenonderwijs? Het is schools aandoende amateur-geschiedschrijving met soms wel een erg eenzijdige kijk op de godsdiensttwisten in de 16e en 17e eeuw in de Lage Landen. Lezers die belangstelling hebben voor de tijd waarin Bartjens leefde, kunnen beter direct de in de bijlage genoemde literatuursuggesties raadplegen.

Tot slot

Deze uitgave lijkt het meest geschikt voor studenten van de lerarenopleiding. Het facsimile geeft een goed beeld van het rekenonderwijs in de Gouden Eeuw. Maar er is wel moed voor nodig om dit rekenboek geheel door te werken en men krijgt bewondering voor de studenten uit de 17e eeuw voor wie dit een verplichting was om een goed betaalde baan te krijgen.
Vondel eerde Bartjens met het lofdicht *Liefd' verwinnet al*. De facsimile-uitgave verdient lof, maar een kortere, meer direct op *De Cijfferinghe* betrokken toelichting was te prefereren geweest.

Over de recensent

Chris van der Heijden (e-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl) begon zijn loopbaan als werktuigbouwkundige in het bedrijfsleven. Van 1969 tot 2001 was hij wiskundedocent en later ook schoolleider aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse.

Lof-zangh, toe-ge-eygent Mr. Willem Bartjens

I.V. VONDELEN. *Liefd' verwinnet al.*

Dees die met haar blont verciersel
Reyckt aan't uytgespannen swierssel,
Die azurigh sit verschoont,
En van d'Astren wort gekroont,
Die tot eenen staf in handen
Voert den Scepter met dry tanden,
En op vloeden twee ten thoon
Heeft verhemelt haren Throon,
Dees, wiens speelgenoots met minnen
Sijn Zee-Goden en Godinnen,
Wiens vloeden heel vergult
Met veel rijckdoms zijn vervult:
Waar in swart-bepeckte vogels
Sweven met hun lichte vlogels,
Die *Caucasi* Dochters Roem
Lieflijck plucken als een Bloem,
Ia aan 't Ooster eynd der werelt,
Daar *Tytonis* Bruyt beperelt
Haar blond hayr met spanssels toyt,
En haar roode Roosen stroyt:
Dees beroemde Maaght verheven
(Segh ick) schept haar lust en leven
Dat ghy in heur schaduw rust,
Aan haar overvloedsche Cust,
Op haar aangename stranden
Daar de voedster vande Landen
Breede Waters maackt te kleyn,
Om te dryven haren treyn,
Haren treyn die uyt u konste
Schept haar leven en haar jonste,
Sonder welck sy onbedocht
Nimmermeer beklyven mocht.
Ghy o *Cithon* hoogh verheven,
Van een hoogen Geest gedreven,
Boven't al gemeyn verstant
Ghy alleen de Croone spant.
Inde *Cypher-Konst* beraden
Leert ghy jeught de rechte graden:
Hoe den groen-geloofden krans
Kroont gerechtigheyts Balans,
Om de rekeningen slechten,
En Koophandel uyt te rechten.
Boven dien in 't Hollands velt
Ghy de suyver Lely stelt.
Siet ons Bykens eens getuygen
Hoe sy Franschen Honigh suyghen,
Tot aan 't Pireneesch geberght
Dat getopt den Hemel terght:
Siet eens waar d'Hollander wandelt,
Hoe hy met den Fransman handelt.
Voorts dijn Veder inden inck
Met de Slangh maackt eenen krinck,
Eenen krinck in't rond getogen,
Die ons 't eeuwigh stelt voor oogen,
Ghelijck sy op jaarsche maat
Haar verrimpelt kleedt uyt laat,
En vernieuwt haar eerste wesen:
Alsoo suldy hoogh ghepresen
Door u konst onsterflijck zijn,
Want u gulde Letters fijn
Sal de schrijf-konst als klaar sterren,
Aan d'uytbreysels wijt uytsperren:
Boven dien, o Hemels Licht!
Doedy door u konstigh Dicht,
Beyd' ons vloeden onbesweken
t'Hemelwaarts hun hoornen steken,
Boven *Nylus*, en den *Taan*,
Of den blonden *Lidiaan*.
Amsterdam sal dy beklagen
Als sy u sal sien verslagen
Stout van d'al-vernielsche doot,
Inder aarden wijde schoot:
Nochtans salmen t'allen tyden
Uwen grooten lof belyden:
Hoe de Koopmanschap vermaart
Nutte vruchten heeft gebaart,
Door u en des Heeren zegen,
Die met synen gouden regen
D'Emstel mildelijck bespoeyt,
Datter neerings welvaert bloeyt.
Adieu *Bartjens*, ick wil swygen,
D'wijl ghy gaat ten Hemel stygen.
'k Wenschte dat ick hier in schijn
Slechts mocht uwen *Echo* zijn.

Voor annotaties bij deze tekst:
dbnl – digitale bibliotheek voor de Nederlandse letteren
(*www.dbnl.nl/tekst/vond001dewe01/vond001dewe01_0008.htm*)

REKENAARSTERS, REKENWERK EN REKENTUIG

Opkomst van de computer in Nederland

[Gerard Alberts]

Inleiding

Een computer was rond 1950 een mens, een rekenaar, of vaker nog een rekenaarster. Vanaf die tijd ging ‘computer’ vooral reken-machine betekenen. Aan de verandering in de vertaling van het Engelse woord computer kunnen we een verschuiving in de betekenis aflezen. In het Nederlands bedoelen we met computer steeds een software-programmeerbare rekenautomaat. De allereerste daarvan in de wereld kwam begin 1949 gereed in Engeland, de eerste in Nederland in 1952.
Adriaan van Wijngaarden (1916-1987) was de grondlegger van de informatica in Nederland. Hij sprak wel graag van ‘rekentuig’. Zo had hij, net als de Engelsen met ‘computer’, ook in het Nederlands een woord waarbij hij in het midden kon laten of hij doelde op de apparaten of op zijn medewerkers.

Koffiemolens

De eerste automatische rekenmachines dateren van 1949, de eerste Nederlandse computer kwam gereed in 1952. Ingewikkeld rekenwerk werd vóór die tijd met de hand en met het hoofd gedaan, door rekenaars. Toen de computers er eenmaal waren, waren de rekenaars niet meteen zonder werk. Er was veel rekenwerk te doen en de rekenautomaten waren wel veel sneller dan mensen maar nog niet erg betrouwbaar. Bovendien was het een hele klus om ze aan het werk te krijgen, om de rekenopdracht om te zetten in ‘code’, programma’s. In feite gebruikte men de eerste vijf jaar, tot het midden van de jaren vijftig, naast elkaar het handwerk, ponskaartenmachines en computers. In dit artikel bespreken we het rekenen als handwerk. Ook bij handwerk gebruikte je machines, elektrisch aangedreven tafelrekenmachines ter grootte van een forse typemachine met 10×10 toetsen. Je hoorde de tandwieltjes ratelen en omdat de vroegere rekenmachines niet elektrisch aangedreven werden maar met een slinger met de hand, sprak men wel van ‘koffiemolentjes’.

Al dat rekenwerk diende ter ondersteuning van klussen als het ontwerpen van vliegtuigen of radio’s, weersvoorspellingen en het berekenen van kogelbanen. De rekenmethode, het algoritme, werd uitgewerkt op een groot vel, zo groot als een dubbel proefwerkblad. Op dit vel gaf de rekenaar die de voorbereiding deed in de bovenrand de onderdelen van de te berekenen functie aan. In de linkerkantlijn noteerde hij de waarden waarvoor de berekening uitgevoerd moest worden. Dit werk noemde men het ‘uittrekken van berekeningen’. Al die onderdelen werden dan met elektromechanische rekenmachines uitgerekend door de rekenaars en genoteerd. Dikwijls was de uitkomst een tabel om weer andere berekeningen te kunnen uitvoeren. Alle resultaten en tussenresultaten moesten telkens met de hand genoteerd worden.

De meest prominente plaats in Nederland voor rekenwerk en rekenmachines was het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Dit onderzoeksinstituut voor wiskunde was opgericht in 1946. Het had vier afdelingen: Zuivere Wiskunde, Toegepaste Wiskunde, Statistische Afdeling en Rekenafdeling. Men had het idee dat de wiskunde nuttig gemaakt kon worden voor bedrijven, wetenschappelijk onderzoek en overheid. Dat was ook zo. De Statistische Afdeling en de Rekenafdeling voerden in de periode 1946-



FIGUUR 1 Aad van Wijngaarden in 1954 tijdens het International Congres of Mathematicians met een Facit-'koffiemolen'-rekenmachine

1960 vele opdrachten uit. De statistici adviseerden bijvoorbeeld bij de verwerking van gegevens bij 'groeiproeven met Wistar-ratten' of bij de controle van gokkast 'Turf King B'. De Rekenafdeling voerde berekeningen uit voor vliegtuigontwikkeling van Fokker, voor telefoonkabels van de PTT, grondwaterbeweging onder de duinen en vele andere vraagstukken. Beide afdelingen hadden grote opdrachten van de Deltawerken.

Rekenwerk

Van Wijngaarden kwam op 1 januari 1947 in dienst als hoofd van de Rekenafdeling. Met zijn komst begon het rekenwerk serieus. In de zomer van 1947 trok hij twee medewerkers aan voor de ontwikkeling van rekenapparatuur. In 1948 nam hij twee medewerkers en zeven medewerksters aan voor het uitvoerend rekenwerk. De mannen hadden een wiskundeopleiding of studeerden nog. De vrouwen kwamen rechtstreeks van de middelbare school, geselecteerd op grond van hun cijfers voor wiskunde. Was de recrutering reeds ongelijk, het werk was ook bepaald eenzijdig verdeeld. De mannen deden het voorbereidend 'uittrekken van berekeningen'; de vrouwen deden het uitvoerend werk. Deze rekenaarsters vormden een hechte club. Zij kregen van Van Wijngaarden een geavanceerde training in rekenwerk, onder meer in itereren, interpoleren en matrix-inversie. Zij waren 'de meisjes van Van Wijngaarden'. Behalve uit de lessen van Van Wijngaarden haalden zij hun rekenkennis uit het gevreesde blauwe boekje, *Interpolation and Allied Tables*, van het Londense Nautical Almanac Office uit 1937, dat uiterst beknopt de uitleg van een basisrepertoire van algoritmen bevatte.

Eddy Alleda was eerstejaars student in Leiden, Truus Hurts, Dineke Botterweg, Reina Mulder en de anderen kwamen rechtstreeks van de middelbare school. Er was een wisselend gezelschap van zes tot acht rekenaarsters in dienst. Onder het rekenen zongen ze, 'vrouwen kunnen twee dingen tegelijk'. Toch vergde het rekenwerk alle concentratie. Een tafelrekenmachine had tien decimalen; ging de lengte van een getal daar overheen, dan moest je de tussenresultaten noteren en zonder vergissing weer invoeren. Denk maar na wat je moet doen om op je rekenmachientje een getal van 14 cijfers te kwadrateren en je wilt daarbij een uitkomst zonder afronding. Hoe moet je je machientje daartoe instrueren?
Het rekenwerk betrof altijd verschijnselen waar geen handige wiskundige uitdrukking voor was, meestal natuurverschijnselen uit de sfeer van de geavanceerde techniek, zoals werveling (turbulentie) om een vliegtuigvleugel, een trillende as (resonantie) van een scheepsmotor, energieverlies in een transformator, of de lichtstralen in een samengestelde lens. Drie onderdelen van het vraagstuk moesten bij elkaar gebracht worden: meetgegevens van het verschijnsel, een theoretisch vermoeden hoe de zaak in elkaar zat en de wiskundige mogelijkheden van het rekenwerk. De kunst om met zulk rekenwerk de werkelijkheid te benaderen heette Numerieke Analyse. Eigenlijk benader je in de Numerieke Analyse twee keer. Ten eerste benader je de vervelende uitdrukking, je theoretisch vermoeden dat niet de vorm heeft van een eenvoudig berekenbare functie, met uitdrukkingen die je wél gemakkelijk kunt berekenen. Ten tweede is dat hele rekenwerk een benadering van het verschijnsel in de werkelijkheid, waarover je enige,



FIGUUR 2 De rekenafdeling van het Mathematisch Centrum; op de voorgrond een 10×10 rekenmachine van het merk Friden

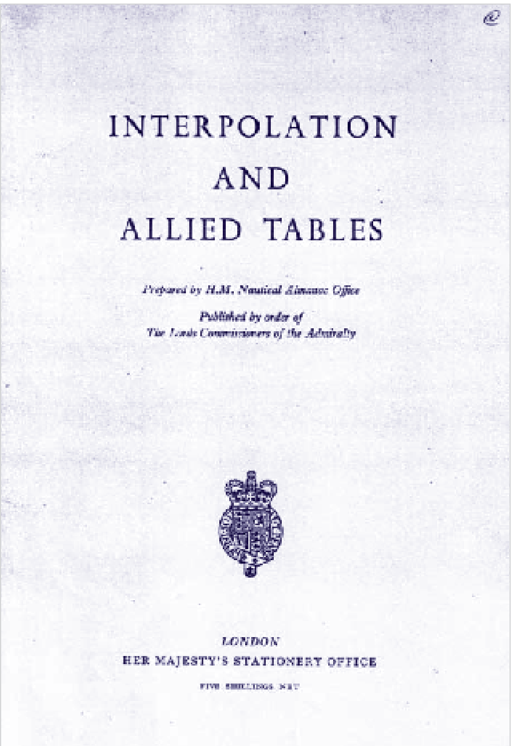
dikwijls indirecte, meetgegevens hebt. Het is niet moeilijk te bedenken dat dan op verschillende plekken in het werk fouten, vergissingen en onnauwkeurigheden binnen kunnen sluipen. Dat was de grote nachtmerrie van de rekenaar.

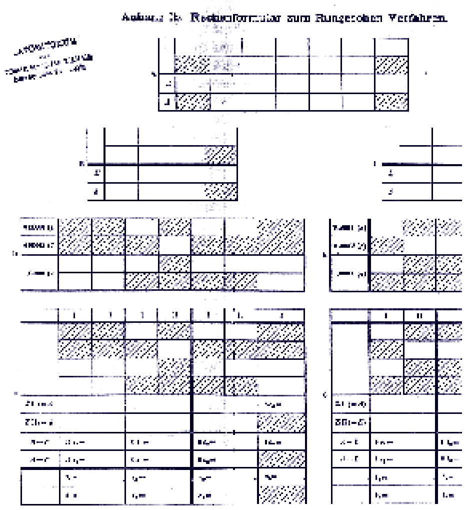
IJzingwekkende formules

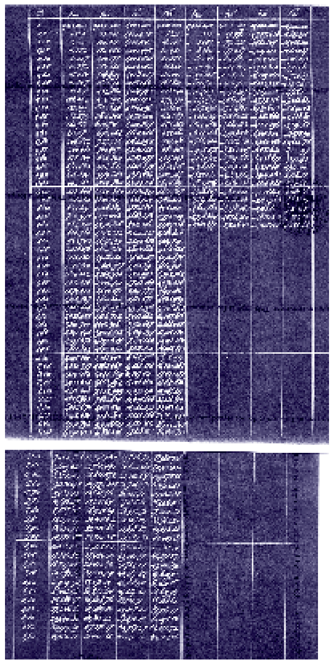
Soms bleek na veel plussen en minnen dat de uitkomst niets zei over het verschijnsel, zoals toen de Dienst Zuiderzeewerken wilde weten of de drooglegging van de IJsselmeerpolders effect had op het grondwater in Noord-Holland. Heel veel rekenwerk later moesten de rekenaars van het Mathematisch Centrum constateren dat de foutenmarge van het resultaat net zo groot was als het verschijnsel, de grondwaterstand, dat men probeerde te benaderen. Hier bleek dat de meetgegevens niet goed genoeg waren om tot een zinvolle uitkomst te komen. Maar de fouten kwamen niet alleen van buiten.
Het rekenwerk was altijd in die twee genoemde opzichten een benadering. Er zaten dus onvermijdelijk afrondings- en benaderingsfouten in. Een complex verband tussen twee grootheden in de natuur werd in principe voorgesteld als een ingewikkelde hogeregraads differentiaalvergelijking. Om eraan te kunnen rekenen stelde men dat ingewikkelde verband bijvoorbeeld voor als een lineair verband, plus een restje, plus een nog kleiner restje, en die restjes verwaarloosde je dan zodra dat verantwoord leek. De expertise van de rekenaar zat erin om ten eerste naar een benaderende formule te komen waarmee het prettig rekenen was, ten tweede om te weten wanneer je mocht verwaarlozen en ten derde in het zó opbouwen van de rekensom dat de onnauwkeurigheden door zulke vereenvoudigingen en verwaarlozingen bij de start van het rekenwerk zich niet uitvergrootten in de verdere som. Dat was de expertise waarin Van Wijngaarden de rekenaarsters opleidde.

Een verdere oorzaak van fouten was de eenvoudige vergissing. Het meeste rekenwerk werd in tweevoud gedaan en als de resultaten niet overeenstemden moest het natuurlijk over. Welke dramatische gevolgen een simpele vergissing kan hebben, vertelde Van Wijngaarden in 1986 bij het veertigjarig jubileum van het Mathematisch Centrum. De rekenafdeling had op verzoek van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium een tabel van een bepaalde functie opgesteld. Dat was een enorm werk waar maanden mee heen gingen in 1949 en 1950. Toen het af was, bleek dat Amerikaanse collega's dezelfde tabel hadden berekend. De uitkomsten waren verschillend.

'We lazen alles over op fouten en vonden niets. Een van onze rekenaarsters, Eddy Alleda, stond bekend om haar zeer nauwkeurige en nimmer falende blik en geduld om dat vreselijke werk te doen. Die rapporten, al die ijzingwekkende formules, moesten echt lettertje voor lettertje gecontroleerd worden. Eindelijk had Eddy het gevonden. We hadden zeer eenvoudige typemachines zonder allerlei symbolen zoals sterretjes. Dat liet je dan bij het typen gewoon open, maar dat kon natuurlijk niet zo blijven staan, want zonder sterretje kreeg je een heel andere functie en dan liep de zaak in de sterren. Die sterretjes werden ingevuld met een zogenaamde stencilpen. Zo'n pen maakt hele kleine gaatjes, te klein. Wat







FIGUUR 3 Interpolation and allied tables, het gevreesde blauwe boekje

FIGUUR 4 Rekenschema

FIGUUR 5 Rekenwerk van Van Wijngaarden uit 1943

wil nu het geval; bij een van die sterretjes waren de gaatjes dichtgelopen. Dus op die plaats werd in het rapport het sterretje niet gevonden. Dat wil zeggen, er werd gevonden dat het sterretje er niet was.'
'Nou daar zaten we dan. Toen wilden we natuurlijk weten of die Amerikanen het dan wel goed hadden. Eddy is gaan rekenen, in haar eentje. Ze heeft al die berekeningen weer van begin af aan opgepakt tot waar dat sterretje erin moest. Doorberekend, doorberekend, doorberekend. Na een aantal maanden had zij het eindantwoord voor die ene speciale waarde. Nu klopte het met de Amerikaanse uitkomst.'

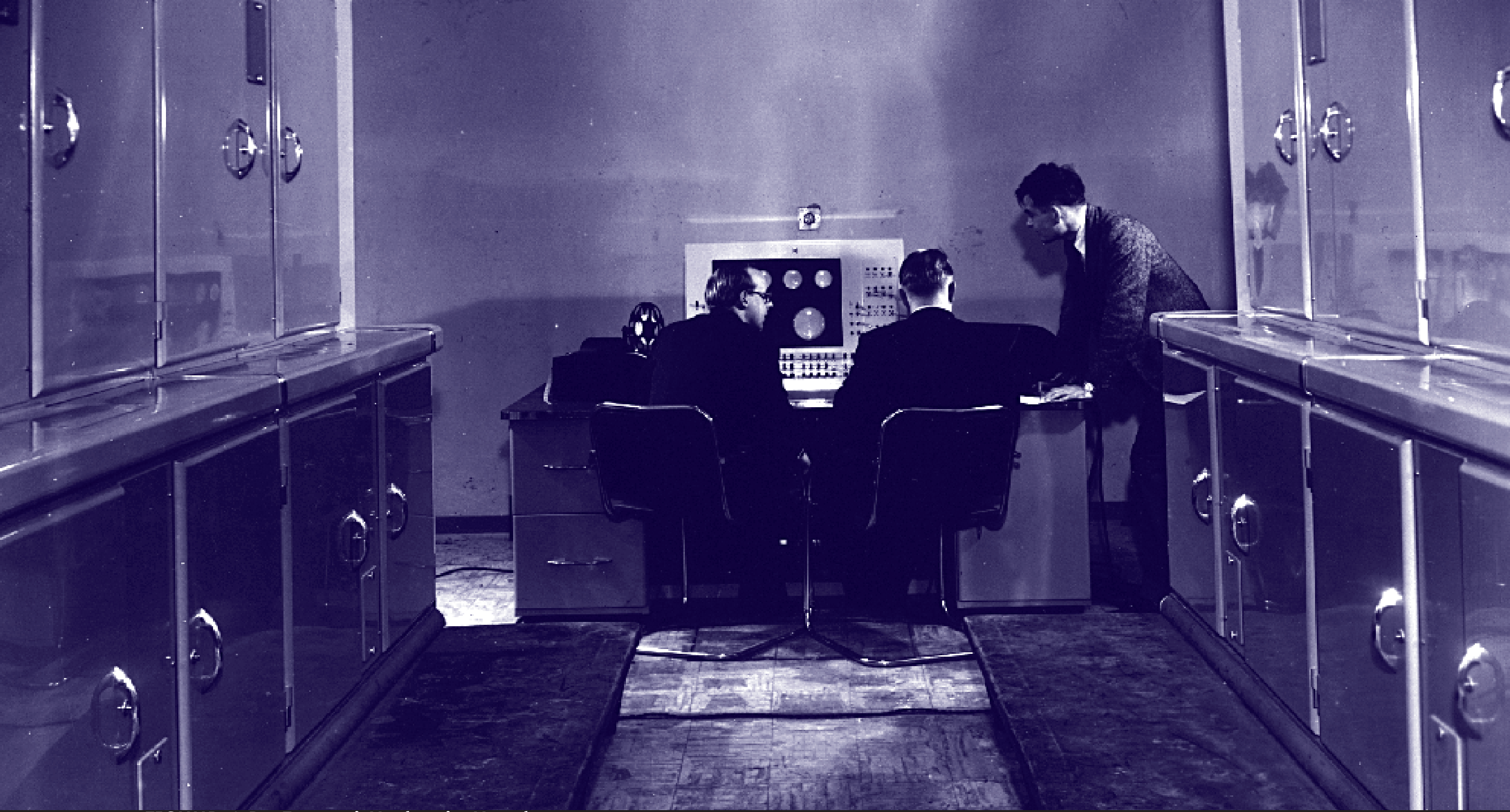
Een prestige-klusje was dat voor Fokker. Toen de Fokker Friendship F27, klaar was, moest – ter controle van de luchtwaardigheid – de draagkracht van de vleugels nagerekend worden. Dat waren ingewikkelde berekeningen en het moest snel klaar zijn. Daarom verzon Van Wijngaarden een systeem van bonussen.
'Je moest velletjes met berekeningen inleveren', vertelt Dineke Botterweg, 'voor het eerste velletje kreeg je een cent extra, voor het tweede twee cent, voor het derde vier, en zo liep het op. Ik was snel met rekenen, dus ik heb in die weken 150 gulden extra verdiend. Dat was zo ongeveer een maandsalaris. Maar op een gegeven moment dacht ik wel: barst maar met je velletjes. Je hebt toch uiteindelijk je eigen tempo.'

Van Wijngaarden was trots op zijn rekenaarsters, en de 'meisjes van Van Wijngaarden' waren trots op het Mathematisch Centrum. Als hij ooit 'rekentuig' zei, dan sloeg dat uitsluitend op de machines en op de mannen die er werkten.

Vergelijkbaar rekenwerk werd gedaan bij verschillende onderzoeksinstellingen in Nederland, zoals TNO, Rijkswaterstaat, het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, bij de Groningse en Leidse Sterrenwachten en bij verschillende laboratoria van de Technische Hogeschool in Delft. Het werk voor de rekenaarsters en rekenaars verliep door de komst van de computers. Dat de rekenaarsters van het Mathematisch Centrum ermee ophielden in de tweede helft van de jaren vijftig kwam niet omdat er geen werk meer was en ook niet omdat ze niet mochten leren programmeren voor de computer –hoewel ook dat werk ongelijk verdeeld bleef. Ze trouwden, de meesten met een wiskundige van het Mathematisch Centrum, en blijven werken na het huwelijk was in de jaren vijftig van de twintigste eeuw niet de gewoonte.

Rekentuig

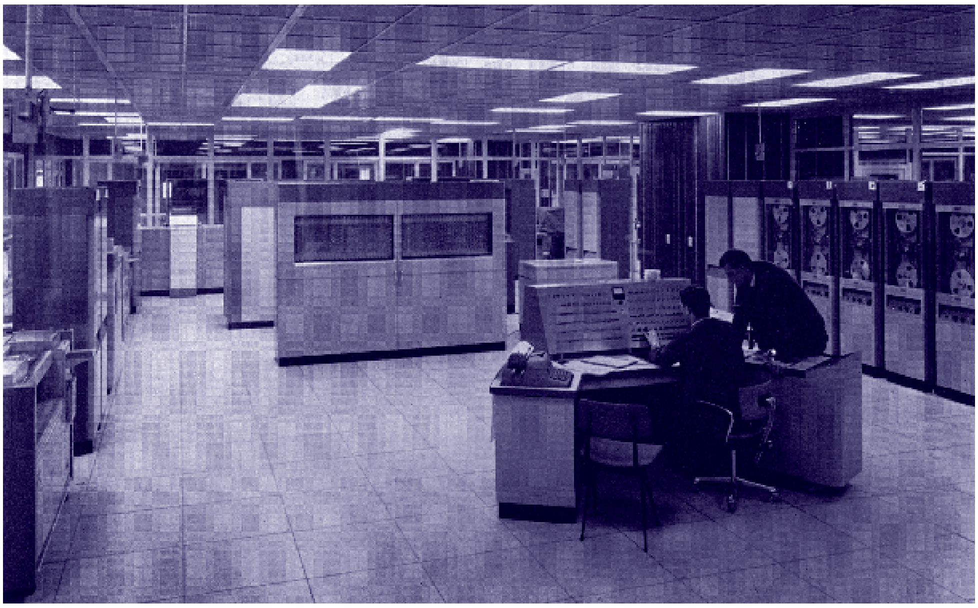
De beide medewerkers die Van Wijngaarden in 1947 aantrok om een rekenautomaat te bouwen waren Bram Loopstra en Carel Scholten. Zij creëerden een team dat in de zomer van 1952 de eerste computer van Nederland voltooide, de ARRA, Automatische RelaisRekenmachine Amsterdam. De ARRA werd op 21 juni 1952 feestelijk in gebruik gesteld door minister Rutten van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen. Bij die gelegenheid liet men de machine een reeks *random numbers*, willekeurige getallen, produceren – over rekentuig gesproken. De volgende ochtend weigerde de ARRA dienst; hij heeft nooit meer gewerkt. In het najaar van 1952 voegde Gerrit Blaauw, die aan Harvard University bij Howard Aiken gepromoveerd was op het ontwerp van een


FIGUUR 6 De Ferranti Mark 1 in Manchester; met rechts Alan Turing

computer, zich bij het team. Samen bouwden zij een nieuwe machine, die om tactische redenen werd voorgesteld als een uitbreiding van de oude en daarom opnieuw ARRA werd genoemd, ook al werkte hij niet meer met relais, zoals de naam suggereert, maar met de veel snellere radiobuizen en diodes. Deze nieuwe ARRA heeft van begin 1954 tot in 1956 goed gefunctioneerd. Er werd zelfs een tweede van gebouwd voor Fokker, de FERTA, Fokker Electronische Rekenmachine Type ARRA. Het Mathematisch Centrum bouwde voor zichzelf nog een derde machine, de ARMAC (1956), maar intussen was reeds besloten dat de constructie van rekenautomaten verzelfstandigd zou worden. In 1956 werd dankzij investering van de verzekeringsmaatschappij Nillmij de firma Electrologica opgericht, met Loopstra en Scholten als directeuren. De eerste computer van Electrologica bleef in de ontwerpfase zo lang naamloos, '*x*' zeggen de wiskundigen dan, dat dit de naam van de nieuwe machine werd: X1. Het was een zeer succesvol product. Er werden vanaf 1958 in Nederland en in Duitsland enkele tientallen van verkocht. De tweede computer, de X8 waarvan er vanaf 1963 een aantal werd geleverd, had minder succes. Electrologica kon het niet bolwerken en werd midden jaren zestig overgenomen door Philips.

Tegelijk met de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum begon in Delft natuurkundestudent Willem van der Poel met de constructie van een relaisrekenmachine. Hij construeerde deze in opdracht van professor Van Heel, voor het maken van optische berekeningen. Verschillende assistenten werkten er verder aan en in 1951 kreeg de Testudo zijn definitieve vorm. Het was nog niet een software-programmeerbare computer, maar rekenautomaat mag men hem best noemen. Van der Poel was intussen door Leen Kosten binnengehaald bij het Centraal Laboratorium van de PTT in Den Haag om daar aan een computer te werken. Hun eersteling heette de PTERA (1953) en vrij snel daarna volgde Van der Poels ontwerp van de ZEBRA, Zeer Eenvoudige Binaire RekenAutomaat. Het had nogal wat voeten in aarde om deze machine geproduceerd te krijgen: de PTT wilde zelf niet in de computerproductie, Philips wilde er niet aan, uiteindelijk nam het Engelse Stantec de ZEBRA in productie. Ook hiervan werden er vanaf 1957 enkele tientallen verkocht. Van der Poel ondersteunde de gebruikers bijeen in de ZEBRA-club.

Shell bouwde wel analoge apparaten maar geen digitale computers. Die schafte het bedrijf aan in Engeland bij Ferranti. De allereerste programmeerbare computer ter wereld kwam gereed in Cambridge, Engeland, in mei 1949. Kort daarvoor, in december 1948, was men er aan de universiteit van Manchester in geslaagd een prototype te laten draaien, de Manchester baby computer. Sneller dan bij het Mathematisch Centrum of bij de PTT werd dit initiatief geprivatiseerd en overgenomen door de firma Ferranti. Het Amsterdamse laboratorium van Shell kocht een exemplaar van het tweede model van Ferranti, de Mark 1*. Dit exemplaar werd bij de installatie begin 1955 MIRACLE gedoopt. Grote afwezige op de computermarkt in Nederland



FIGUUR 7 De PASCAL, Philips Akelig Snelle CALculator, in het nieuwe rekencentrum van Philips (1961)

in de pionierstijd was Philips. Deze firma was goed in elektronische producten, leverde allerlei meet- en regelapparatuur, maar geen computers. Pas in 1952 formeerde het Natuurkundig Laboratorium van Philips een groep die een computer mocht ontwerpen. De PETER, Philips Elementaire Tweetallige Electronische Rekenmachine, was een bescheiden prototype dat vanaf 1956 berekeningen uitvoerde. Ambitieuzer van opzet was de PASCAL, Philips Akelig Snelle CALculator, die in proefopstelling gereed kwam in 1959 en eind 1960 met zusterapparaat de STEVIN de kern vormde van het nieuwe rekencentrum van Philips. Eerst daarna stortte de gloeilampenfabriek uit het zuiden des lands zich voluit op de ontwikkeling van computers en toen werd ook duidelijk waarom: Philips leverde componenten aan IBM en had zich in ruil voor deze klandizie verbonden zich niet zelf op de computermarkt te begeven. Toen het bedrijf na afloop van die overeenkomst die markt wel betrad met een geheel nieuwe vestiging in Apeldoorn in 1963, werd dat, zelfs na de overname van Electrologica, geen groot succes.

Rekentuig is een braaf woord uit de jaren vijftig van de twintigste eeuw. In dat decennium ontplooiden vrijbuiters in niet-commerciële omgevingen hun initiatieven. Ook het NatLab van Philips en in iets mindere mate het Centraal Laboratorium van de PTT waren werkplaatsen met een bijna academische sfeer. In Amsterdam, Delft, Den Haag en Eindhoven werden met beperkte middelen gedurfde apparaten met fantasierijke namen gebouwd.
De jaren vijftig vormden een episode van nijvere rekenaarsters, noest rekenwerk en woest rekentuig.

Noot

Het eerste gedeelte van dit artikel werd eerder gepubliceerd onder de titel 'Rekenmeisjes en rekentuig' in Pythagoras (jaargang 43, nummer 1; september 2003). Die Pythagoras-jaargang 2003-2004 had als thema 'rekenwerk', met daarin ook veel andere interessante artikelen over rekenen.

Literatuur

- *G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis (red.): Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarloozen. Amsterdam: CWI (1987).*
- *G. Alberts: Jaren van berekening; toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskunde-beoefening, 1945-1960. Amsterdam: AUP (1998).*
- *E. van Oost, G. Alberts, J. van den Ende, H.W. Lintsen (red.): De opkomst van de informatie-technologie in Nederland. Den Haag: Ten Hagen Stam (1998).*
- *Gerard Alberts: Rekengeluiden. De lichamelijkheid van het rekenen. In: Informatie & Informatiebeleid 18-1 (2000); pp. 42-47.*
- *G. Alberts: Een halve eeuw computers in Nederland: 1. Een willekeurig getal. In: Nieuwe Wiskrant 22-1 (2002); pp. 6–8.*
- *G. Alberts: Een halve eeuw computers in Nederland: 2. Het geluid van rekentuig'. In: Nieuwe Wiskrant 22-3 (2003); pp. 17–23.*
- *G. Alberts: Rekenmeisjes en rekentuig. In: Pythagoras 43-1 (2003); pp. 4-7.*

Over de auteur

Gerard Alberts (e-mailadres: G.Alberts@WenS.ru.nl) studeerde wiskunde en promoveerde in 1998 cum laude in de geschiedenis op Jaren van berekening. Hij is coördinator Wetenschap&Samenleving aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Hij bereidt een biografie voor over Aad van Wijngaarden en verblijft op dit moment in München als scholar-in-residence in het Deutsches Museum om de rekengeluiden van pionierscomputers te onderzoeken.

REKENLIEDJES IN GROEP 3

Hoe wordt het reken-wiskundeonderwijs weer driedimensionaal?

[Marjolein Kool]

Kleuters willen graag leren

In groep 1 en 2 van de basisschool kan alles in de klas of daar buiten aanleiding zijn voor reken-wiskundeonderwijs. Als de zon schijnt verdiepen kinderen zich in de schaduw. Waar komt die nou ineens vandaan? En hoe komt het dat de schaduw beweegt, terwijl de boom stil blijft staan? Als de kinderen slakken vangen, wordt er een slakkenrace gehouden. Tijdens de gymles kun je onderzoeken wie de meeste kegels omgooit en wie het verst kan springen en wie het hardst kan lopen en hoe je daarvan de score kunt bijhouden, en als er een kind jarig is, gaan we uitzoeken of er voor ieder kind een traktatie is. Bij al die activiteiten wordt er aan reken-wiskundige doelen gewerkt en worden kinderen uitgedaagd om zelf allerlei oplossingen voor vragen te vinden. Vaak gaat het om vragen die de kinderen zich zelf gesteld hebben, en de motivatie om er aan te werken is meestal erg groot.

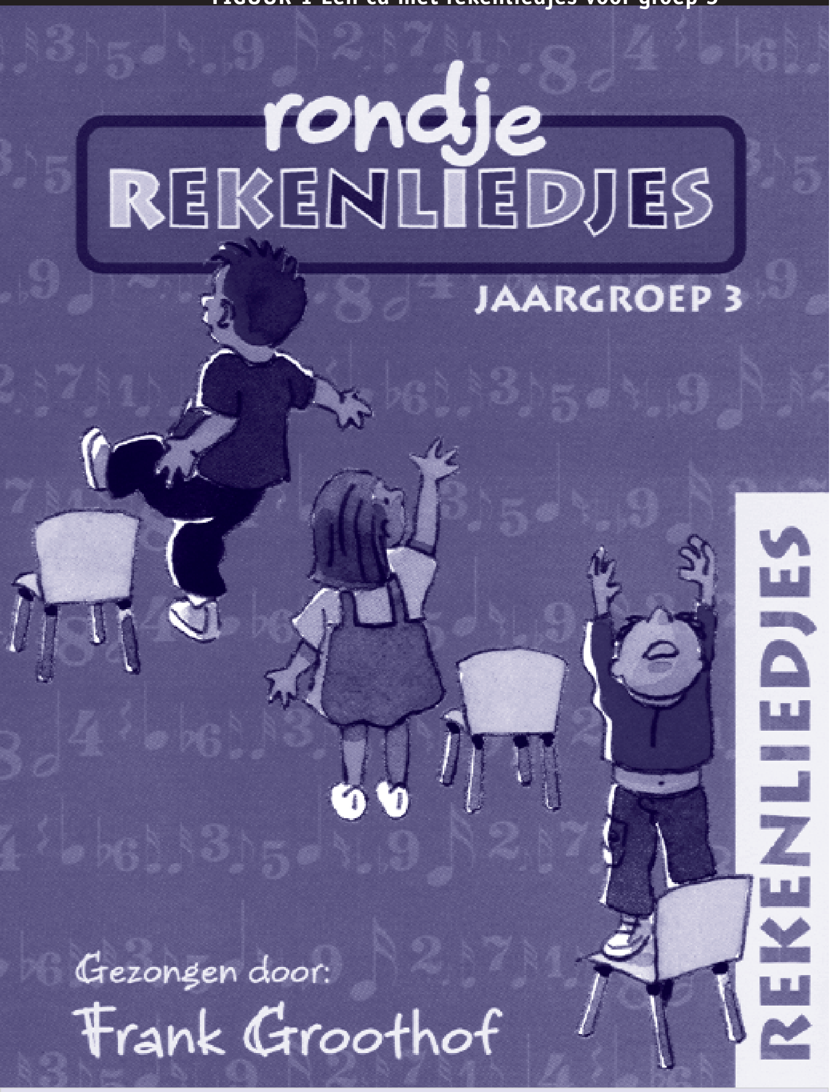
Leerkracht in groep 1/2, de moeilijkste baan in onderwijsland

Kleuters moeten en willen heel erg veel leren. De wereld van kleuters is één grote leerschool en ze zijn overal voor te porren. Ze zitten op de wip (hoe kan het nou dat die niet in beweging komt, als er een veel te zwaar kind aan de ene kant zit?). Ze willen dingen rollen, stapelen, ordenen, verstoppen, opruimen, eerlijk verdelen, enzovoort. De leerkracht van de kleutergroep moet als geen ander kansen benutten en van elke situatie die zich voordoet, een leermoment maken. Dat is niet eenvoudig. Collega's in de hogere groepen van de basisschool hebben de steun van een methode. Maar voor de eerste twee groepen bestaan alleen maar doel- en leerlijnbeschrijvingen[1] en de zogeheten ideeënboeken. In die boeken (vaak kisten of koffers) zitten allerlei lesideeën voor reken-wiskundeactiviteiten, soms thematisch geordend. De leerkracht kan daar op gezette tijden losse lessen uit kiezen en gericht aan bepaalde doelen werken, maar als de kinderen in de herfst tassen vol eikels en kastanjes meebrengen, moet je dat natuurlijk uitbuiten. Aansluiten bij wat kinderen bezighoudt is een belangrijk uitgangspunt.

Daarnaast moet de leerkracht ook aansluiten bij wat kinderen kunnen. Maar hoe stel je vast wat een kleuter kan? Dat is een kwestie van goed observeren, de juiste vragen stellen, kijken hoe een kind mee doet en daar verslag van leggen. Een kleuter kun je geen proefwerk afnemen. Hoewel er de laatste tijd toch wel kleutertoetsen zijn ontwikkeld om vast te stellen of een kind klaar is voor de overstap naar groep 3. Daar is veel discussie over. Zo'n toets lokt altijd weer trainen voor de toets uit, terwijl juist het spontane leren, aansluitend bij wat het kind zich afvraagt, zo belangrijk is.

Anderzijds is het niet eenvoudig om voor elk kind afzonderlijk goed bij te houden hoe het met de reken-wiskundige ontwikkeling is gesteld. Kent het kind de telrij? Kan het synchroon tellen? (Als een kind asynchroon telt, gaat het opnoemen van de telwoorden en het aanwijzen van de objecten nog niet gelijk.) Kan het kind resultatief tellen? (Kinderen vinden het tellen van objecten vaak een leuk toneelstukje: je wijst iets aan en je spreekt een tekst. Dat je telt om een telresultaat te vinden, wordt hen pas na enige tijd duidelijk.) Kan het kind tellen in sprongen? Kan het vanaf een bepaald getal vooruit of terug tellen? Kan het getalsymbolen herkennen? Kan het ordenen, sorteren, classificeren? Kan het omgaan met *meer, minder, evenveel, eerlijk verdelen*? Kleuters verkennen niet alleen de wereld van getallen en hoeveelheden, ze zetten ook hun eerste stappen op het gebied van meten en meetkunde. Ze maken kennis met begrippen als *links, rechts, onder, boven, voor, achter, er omheen, tussendoor*, enzovoort. *Krom, recht, hoekig, golvend, gekarteld, hol, bol, vlak, vierkant, ovaal, cirkel,*

FIGUUR 1 Een cd met rekenliedjes voor groep 3



Verjaardagslied

Refrein:
Koko en Jojo zijn jarig vandaag.
Ze willen een feestje gaan vieren,
met taart en met slingers. Ze willen heel graag
cadeautjes van andere dieren.

Ref...
De kip die had een goed idee.
Ze bracht vier verse eitjes mee.
Twee voor Ko en twee voor Jo.
Dank je kip, voor dit cadeau.

Ref...
De aap die had een goed idee,
Die bracht wel tien bananen mee.
Vijf voor Ko en vijf voor Jo.
Dank je aap, voor dit cadeau.

Ref...
Het schaap dat had een goed idee
Dat bracht acht warme sokjes mee.
Vier voor Ko en vier voor Jo.
Dank je schaap, voor dit cadeau.

Ref...
Het paard dat had een goed idee
Dat bracht elf paardebloemen mee.
Arme Ko en arme Jo,
want hoe deel je dit cadeau?

FIGUUR 2

driehoek, enzovoort. *Groter, kleiner, dikker, dunner, hoger, lager, voller, platter*, en ga zo maar door. Deze lang niet volledige opsomming maakt al duidelijk dat er in de kleutergroep vrijwel nooit geïsoleerd aan reken-wiskundedoelen wordt gewerkt; er moet gelijktijdig aandacht zijn voor allerlei andere doelen, op het gebied van taalgebruik, sociale vaardigheden, motoriek, waarden en normen, zelfvertrouwen, enzovoort. Er mogen drie kinderen in de poppenhoek. Ga maar eens kijken of jij er nog bij mag. Jullie willen allemaal op de trapkar. Hoe kunnen we dat oplossen? Is de oudste kleuter ook de grootste kleuter? Hoe kunnen we dat uitzoeken? Kinderen hebben veel vragen en in de groepen 1 en 2 krijgen ze de kans op zoek te gaan naar antwoorden. Dat kan in de klas zijn, maar ook op het schoolplein, in de gymzaal of in de supermarkt. Het leren gebeurt met allerlei materialen uit de echte wereld of uit de leermiddelenfabriek en in veel gevallen heb je tijdens je onderzoek ogen, oren, armen en benen nodig.
Als je boven op de tafel staat, kun je zijn poten niet meer zien. Waar zijn die dan gebleven? Leren in de kleutergroep is betekenisvol en vol actie.

Het programma van groep 3 is overvol

Op een dag gaat het kind naar groep 3. Opeens mag het niet meer op de tafel gaan staan, maar moet het aan een tafel op een stoeltje zitten en naar plaatjes in boekjes kijken. Natuurlijk zijn dat best leuke plaatjes, maar het zijn plaatjes en geen echte spullen. Van de ene dag op de andere wordt de leerwereld een platte wereld van computerscherm en lesboek[2]. De kinderen worden zich bewust dat ze allerlei dingen *moeten* leren. Ze moeten leren lezen en schrijven. Het is een doel dat ze allemaal graag willen bereiken, maar de weg er naar toe is wel heel erg lang. Dagelijks moet er flink geoefend worden.
Dat geldt ook voor de rekenles. Onderwerpen uit de domeinen meten en meetkunde verdwijnen tijdelijk naar de achtergrond, want de kinderen moeten in groep 3 leren optellen en aftrekken tot 20. Daarvoor is het belangrijk dat ze de basale bouwstenen van het rekenen stevig oefenen: verdubbelen, halveren, tellen in sprongen, terugtellen, de vijfstructuur in getallen herkennen (bijvoorbeeld $6 = 5 + 1$), de tienstructuur herkennen (bijvoorbeeld $14 = 10 + 4$), de splitsingen van 10 kennen en ook van de andere getallen onder de 10, enzovoort. Deze basale bouwstenen moeten een hecht fundament gaan vormen, dus wordt er flink geïnvesteerd op het automatiseren en memoriseren. Natuurlijk moeten leerlingen ook goed begrijpen wat ze doen. Maar als het begrip er is, is de volgende stap dat ze snel uit hun hoofd moeten weten dat $7 + 7 = 14$, want dan kun je razendsnel $7 + 8$ uitrekenen ($7 + 7 + 1$). En als kinderen snel weten dat $10 = 7 + 3$ en $5 = 3 + 2$, dan kunnen ze handig $7 + 5$ uitrekenen en later $17 + 5$, $97 + 5$ en $37 + 25$. De basale bouwstenen van het aanvankelijk rekenen zijn zo belangrijk dat kinderen onherroepelijk later in de rekenproblemen komen als dit fundament niet heel stevig wordt gelegd.

Hoe hou je het leuk in groep 3?

In groep 3 moet er van alles. Gelukkig zijn er goede methodes die de leerlijnen en tussendoelen in het oog houden, maar die maken het programma vol en vaak plat. Boeken en papieren spelen de hoofdrol. Natuurlijk blijven leerkrachten ook in groep 3 kansen benutten en inspelen op wat kinderen bezighoudt en hebben al heel wat didactici en onderwijsontwikkelaars gezocht naar mogelijkheden om ook in groep 3 speelse lesactiviteiten en een rijke leeromgeving op te bouwen. Er zijn allerlei spelletjes en materialen op de markt; alleen een cd met rekenliedjes voor groep 3 bestond nog niet. Anneke Noteboom en ik besloten dit gat in de markt te vullen, omdat liedjes volgens ons een bijdrage kunnen leveren aan het speelser en actiever maken van het onderwijs in groep 3 (zie figuur 1). Zingen is gezellig, zingen is vrolijk, je mag erbij bewegen, je mag je stem verheffen, kinderen hebben soms nauwelijks in de gaten dat het om een rekenles gaat en bovendien hebben de liedjes nog een aardige eigenschap: ze rijmen. Dat helpt bij het memoriseren van de basale bouwstenen: rijm is geheugenlijm.

De rekenliedjes

Bij de rekenliedjes is memoriseren inderdaad regelmatig een doelstelling. In het zwemlied staat Bas op de duikplank. Hij telt van 10 terug en als hij bij nul is, zal hij in het water springen, maar telkens stelt hij dat moment uit met een of ander smoesje: hij heeft zijn sokken nog aan, hij wil eerst een bakje friet eten, er komt een bij aan en het water is te nat. Als hij eindelijk in het water springt, is het al zo laat dat de badmeester roept, dat hij het bad gaat sluiten. Tijdens dit lied wordt steeds weer van 10 af teruggeteld. En als het lied uit is, smeken de kinderen om herhaling. Zo wordt de terug-telrij stevig in het geheugen geprent, een goede zaak.
De meeste rekenliedjes willen echter meer zijn dan een memoriseeroefening in een aardig jasje. In het springlied denkt Marco dat hij heel ver kan springen. Hij springt de telrij van 2, 4, 6, 8 enzovoort, maar de kikker, de vlo en de kangoeroe springen veel beter, namelijk met sprongen van 5 en 10 en 100. Net als Marco sip zijn verlies wil erkennen, komt Sloffie Slak in beeld:

Sloffie Slak zei: 'Wat een leven!
Ik sta al een week op zeven.
Zeven is een mooi getal.
'k Denk niet dat ik springen zal.'

Met dit lied kunnen de kinderen allerlei telrijen memoriseren, maar vervolgens worden ze uitgenodigd om het volgende couplet te zingen:

Ik hou ook van stoere dingen.
En ik kan ook heel goed springen.
Tel je even mee met mij?
Dit vind ik de mooiste rij...

Hier worden kinderen uitgedaagd om aan het eind van het couplet zelf een telrij in te vullen. Dat kan natuurlijk een van de rijen uit het liedje zijn, maar het wordt mooier als kinderen zelf ook allerlei andere rijen gaan bedenken. Met grote of kleine getallen, passend bij het niveau dat ze aan kunnen. Zo brengen ze elkaar ook op goede ideeën. 'Mag je ook achteruit springen?', vroeg een leerling. Zodra kinderen de ruimte krijgen om zelf ideeën in te brengen, komen ze met mooie vondsten. Dit liedje kan meegroeien met de kinderen. In de loop van het jaar zullen ze moeilijker telrijen aan kunnen, of telrijen langer door kunnen zetten. Ook biedt het mooie differentiatiemogelijkheden: wie vaardiger is, bedenkt moeilijker rijen, wie er moeite mee heeft, houdt het bij eenvoudige sprongen en kleine getallen. Het leren van en met elkaar is bij deze liedjes een vereiste. In het verjaardagslied (zie figuur 2) is er sprake van een jarige tweeling. Ze moeten alle cadeautjes die ze krijgen eerlijk verdelen. Dat is geen probleem zolang het om even getallen gaat, maar dan komt het paard. Dat dier brengt voor de tweeling 11 paardebloemen mee. Hoe moeten ze dat cadeau nou verdelen? De kinderen van onze proefschool kregen 11 fiches om het probleem aan te pakken. Een kind begon de fiches aan de tweeling uit te delen, om de beurt ieder een. Toen ze klaar was vroeg de leerkracht: 'Is het nu eerlijk verdeeld?' 'Nee', zag het kind. Ze had heus eerlijk om-en-om uitgedeeld, maar het kwam toch niet eerlijk uit. Aan de ene kant lag er eentje meer. Wat nu? Hoe verdeel je elf paardebloemen? De klas bedacht mooie oplossingen: 'We zetten de bloemen allemaal in één vaas, dan kunnen ze er samen naar kijken.' Of een ander: 'We geven een bloem terug aan het paard. Dan hebben ze nog tien bloemen over en die kun je wel eerlijk verdelen.' Wat u ook van hun oplossingen mag denken, in ieder geval hebben alle leerlingen ervaren dat er getallen zijn die je eerlijk kunt delen en dat er ook getallen zijn waarbij dat niet kan. Dat is een belangrijke en waardevolle ontdekking. Minstens zo belangrijk als het memoriseren van de halveringen van de even getallen onder de twintig.

Meten en meetkunde in groep 3

Hoewel in groep 3 de aandacht in de rekenles vooral uitgaat naar getallen en hoeveelheden, vonden wij het een gemiste kans om niet ook een paar liedjes over meten en meetkunde op te nemen. Dus hebben we een meetlied opgenomen. Als de meester de gang meet, is-ie 8 stappen lang en als een kind het doet, is-ie 13 stappen lang.

Wat gek, hoe zit dat dan?
Snap jij hier soms wat van?
Kun jij me even helpen
en vertellen hoe dat kan?

Natuurlijk hopen we dat de leerkrachten vervolgens hun leerlingen uitdagen om zelf allerlei zaken in en om de klas op te meten. Kan dat op een 'eerlijker' manier dan meten met voetstappen?
In het vlieglied kijkt een vliegenier vanuit het vliegtuig omlaag en ziet dat de huizen niet groter zijn dan een blokje en de toren van de kerk is net een stokje en koeien zijn er net zo klein als miertjes en miertjes kun je van grote hoogte zelfs helemaal

FIGUUR 3 Als verwerking van het verjaardagslied mogen de kinderen nu zelf eerlijk delen.





FIGUUR 4 In de kleutergroepen gebeurt het leren spontaan, actief, geïntegreerd en driedimensionaal. Hoe kun je die lijn naar groep 3 voortzetten?

niet zien... Kinderen ontdekken dat iets op grote afstand klein lijkt, maar als je dichterbij komt gaat het 'groeien'. Dat wisten ze misschien al, maar het liedje maakt die ervaring meer bewust en daagt kinderen uit om er over na te denken. Hopelijk gaat de leerkracht vervolgens met de kinderen uitproberen hoe dingen op het schoolplein er op grote afstand uitzien, anders blijft het weer plat en papieren onderwijs.

Actief en betekenisvol

Deze adviezen en ideeën hebben we in de handleiding voor de leerkracht geschreven. Elk liedje zou het begin kunnen zijn van betekenisvol en actief onderwijs. In de docentenhandleiding laten we zien hoe dat kan. Verder maakten we een speelrekenboekje voor de leerlingen dat bij elk liedje een aantal activiteiten geeft, waar kinderen aan kunnen werken. Bij een liedje over getalsplitsingen hebben we een dobbelspelletje bedacht waarbij de kinderen niet het aantal zichtbare ogen vooruit mogen gaan, maar juist het aantal ogen dat aan de onderzijde van de dobbelsteen niet zichtbaar is. Zo oefenen ze op speelse wijze de splitsingen van 7. Nog liever zouden we elke leerkracht een kist met touw, stokken, scharen, oude kranten, spiegels, wc-rolletjes, weegschalen, knikkers, blokken, kastanjes, enzovoort geven. Want rekenliedjes bieden weliswaar de mogelijkheid om even van de stoel af te komen, als het rekenonderwijs dan toch weer met een boek en een schrift verder gaat is de kloof tussen groep 3 en de rijke leeromgeving van de kleutergroepen nog lang niet gedicht.

Noten

[1] Bekende leerlijnbeschrijvingen voor de onderbouw zijn samengesteld door de TAL-groep:
- A. Treffers, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys (red.): Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool. Groningen: Wolters–Noordhoff (1999).
- M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys (red.): Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Groningen: Wolters-Noordhoff (2004).
[2] Claudi Alsina gaf tijdens de Nationale Wiskunde Dagen in 2000 een indrukwekkende lezing over deze problematiek onder het motto 'How Johnny became a Flatlander.'
[3] Marjolein Kool, Anneke Noteboom: Rondje Rekenliedjes, voor jaargroep 3. Tilburg: Zwijsen Educatief B.V. Informatie: www.zwijsen.nl
ISBN 90-276-8329-8 (cd)
ISBN 90-276-8330-1 (speelrekenboek)
ISBN 90-276-8328-X (handleiding)

Over de auteur

Marjolein Kool (e-mailadres: mjhkool@planet.nl) is dichteres en pabo-docent rekenen-wiskundedidactiek aan de Hogeschool Domstad in Utrecht.

N.L.W.A. GRAVELAAR (1851 – 1913)

'Hij verstond de kunst, een onderwerp zo aan te vatten, dat het na de les eigendom was geworden van de aandachtige leerlingen. Als geleerde stond hij zeker nog hoger.'

[Dick Klingens]

Rekenboek

Het boek staat al een tijdje in mijn boekenkast, *Leerboek der Rekenkunde* geschreven door N.L.W.A. Gravelaar, leeraar[1] aan de Rijkskweekschool voor onderwijzers te Deventer. Ik denk dat ik het ergens op een tweedehandsboeken-markt heb aangeschaft. Het verscheen als tweede verbeterde druk in twee delen in 1896 bij P. Noordhoff te Groningen, hoewel de schrijver in zijn voorbericht de firma J.B. Wolters te Groningen noemt, maar vermoedelijk slaat dat op de eerste druk.

Ook de bijbehorende opgaven, eveneens in twee delen, heb ik na een zoektocht op internet in mijn bezit gekregen: *Opgaven ter Toepassing van de Theorie der Rekenkunde*, ook de tweede druk, verschenen in 1904 – het eerste opgavenboekje telt 880 opgaven, het tweede 625.

Gravelaar begint zijn voorbericht met[2]:

«Op wetenschappelijk rekenkundig gebied vertegenwoordigt dit *Leerboek der Rekenkunde* met mijn *Leerboek der Algebra* een scherp afgebakende richting, waarvan de hoofdtrekken zich gevoeglijk in een zestal stellingen laten samenvatten.»

De eerste drie 'stellingen' geef ik hieronder geheel weer. Ik laat ze voor wat ze zijn (curiosa?); helemaal begrijpen doe ik ze niet, laat staan onderschrijven.

«1. Een nauwkeurige omschrijving van het begrip "aantal" schijnt niet mogelijk te zijn [volgens Gravelaar dus; dk]. Voor een logische behandeling van de leer der getallen is het evenwel voldoende, ondubbelzinnig vast te stellen, wat men verstaat door de "gelijkheid" en wat door de "som" van twee aantallen.

2. Zonder aan de algemeenheid der theorie te kort te doen en de toepassingen er van tot bijzondere soorten van grootheden te beperken, kunnen begrippen als toestand, richting, meten en draaien, enz. niet als uitgangspunt worden gekozen voor de ontwikkeling van het getalbegrip; elke uitbreiding van dit begrip moet uitsluitend gegrond zijn op beschouwingen van rekenkundigen aard.

3. Uit de optelling hebben zich door herhaling en omkeering de zeven bewerkingen der rekenkunde ontwikkeld. Aan de omstandigheid, dat uitvoerbaarheid van de omgekeerde bewerkingen aan beperkende voorwaarden gebonden is, hebben de symbolische getallen, d.z. de nul, de negatieve, de gebroken, de onmeetbare en de imaginaire getallen, hun ontstaan te danken.»

In de volgende drie stellingen probeert Gravelaar onder meer duidelijk te maken, dat die symbolische getallen in elk rekenkundig verband een eenduidige betekenis moeten hebben. Hij onderbouwt dit door (nog steeds in zijn voorwoord) te verwijzen naar werken van o.a. Bertrand, Dedekind en Tannery.

Hij geeft onder meer als voorbeeld: «Zoo mag de beteekenis van $\sqrt{-1}$ in $(\sqrt{-1})^2$ geen andere zijn dan in $a^{\sqrt{-1}}$.»

Voorwaar, toen ik dit gelezen had, dacht ik (en ik had het niet ver mis), dat de erop volgende hoofdstukken van redelijk hoog niveau zouden zijn. Toch is het een tekst die bedoeld is voor *onderwijzers in opleiding*, hoewel Gravelaar daarover in het voorbericht niets schrijft. Maar dat het zo is, blijkt uit enkele van de op de achterflap voorkomende 'Beoordelingen': (Rotterd. Nieuwsblad:) Voor aankomende onderwijzers achten wij dit een uitstekend boek; de schrijver heeft er alles in gezegd, wat over de rekenkunde maar te zeggen valt.

19) *De duur van een spoorreis is recht evenredig met den af te leggen afstand en omgekeerd evenredig met de snelheid van den trein. En de snelheid van den trein is recht evenredig met den 2e-machtswortel van de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt, en omgekeerd evenredig met het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat. Als een weg van 25 KM door een trein van 18 rijtuigen in een half uur wordt afgelegd en er in dien tijd $506\frac{1}{4}$ KG steenkool verbruikt wordt, hoeveel KG steenkool zal men dan noodig hebben, om een trein van 16 rijtuigen in 28 minuten een afstand van 21 KM te doen afleggen?*

FIGUUR 1

(dk:) Worden er vandaag de dag nog wel eens schoolboeken besproken in een dagblad?
(De Toekomst:) Voor onderwijzers, die de rekenkunde grondig begeeren te kennen, zal het werk van den heer G. van dienst zijn. Dat zij het zich aanschaffen; wij verzekeren hen, dat zij hunne uitgaven niet zullen beklagen.
(dk:) De prijs van elk der leerboeken was *f* 1,25; die van de opgaven *f* 0,60.

Het is, gebruikelijk voor die tijd, zeker een gedegen werk over de rekenkunde: de zeven bewerkingen der rekenkunde (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling, machtsverheffing, worteltrekking en logaritmeneming) komen telkens opnieuw aan de orde bij de behandeling van de verschillende getalsoorten. De eigenschappen van die bewerkingen worden ook telkens opnieuw getoetst.
Het merendeel van de eigenschappen wordt door Gravelaar weergegeven in de vorm van een stelling, soms alleen een algoritme in woorden en meestal zonder bewijs, maar wel voorzien van voorbeelden waarin dan bij de uitleg wordt teruggegrepen op eerdere stellingen.
Gravelaar noemt als voornaamste soorten getallen de rekenkundige getallen, «d.z. de geheele, de gebroken en de onmeetbare getallen», de algebraïsche getallen, «d.z. de positieve en de negatieve getallen», de imaginaire getallen en de quaternionen, en hij voegt eraan toe, dat in zijn leerboek alleen de rekenkundige getallen worden behandeld.
Duidelijk is die opsomming niet; later blijkt bijvoorbeeld dat voor Gravelaar een geheel getal (soms) niets anders is dan wat wij onder een natuurlijk getal verstaan.

Ik sprak over gedegen, maar daarop is ook nog wel wat aan te merken. Een voorbeeld (weer uit het voorwoord). «De meest gangbare, maar niet te verdedigen bepaling, "dat men een breuk krijgt, als men een of meer eenheden in een zelfde aantal gelijke delen verdeelt en een of meer van die deelen neemt", heb ik vervangen door de omschrijving: "Met p/q vermenigvuldigen wil zeggen, dat men door q moet deelen en daarna met p vermenigvuldigen".»

Uiteraard is het niet de bedoeling de vier boeken van Gravelaar te onderwerpen aan een uitvoerige bespreking. Veeleer wil ik enige aandacht besteden aan de manier waarop Gravelaar de rekenkunde benadert. De lezer moet daarbij zijn oog deels gericht houden op wat we *nu* aan leerlingen van het voortgezet onderwijs – en vooral aan studenten van de pabo – voorleggen.
Ik ben (helaas) niet in staat geweest andere rekenmethoden die in Gravelaars tijd gebruikt werden bij het kweekschoolonderwijs, te vergelijken met diens Rekenkunde. Gravelaars boeken zullen zeker kenmerkend zijn voor het rekenonderwijs in zijn tijd.

Ik laat hieronder enkele paragrafen uit beide boeken volgen, soms voorzien van wat commentaar, en soms ook van een opdracht aan de lezer.

Eigenschappen van getallen

«**§40. Stelling.** *Als men een getal met een som moet vermenigvuldigen, dan mag men dat getal ook met de termen der som afzonderlijk vermenigvuldigen en de komende producten optellen;* – m.a.w.: *Als men producten met hetzelfde vermenigvuldigtal moet optellen, dan mag men dat gemeenschappelijke*

VERMENIGVULDIGING.

§ **260. Eerste geval.** *De vermenigvuldiger is een eindigend getal van één cijfer, de nullen aan de rechter- en de linkerhand niet medegerekend.* Bv.:

5,43452 = 5 , 43 452 452 452 . . .
8 8
43,47616 43 , 44 616 616 616 . . .
+3 +3 +3 +3 +3
43,47619 = 43 , 47 619 619 619 . . . .

De perioden leveren met 8 vermenigvuldigd telkens een zelfde product op: de 1e periode levert 3616 hd op, de 2e periode 3616 hm, de 3e periode 3616 hdm, enz.

Telt men de 3 h, die 8-maal de 1e periode bevat, bij 8 × 5,43 = 43,44 op, — de 3 hd, die 8-maal de 2e periode bevat, bij de van 8-maal de 1e periode overgebleven 616 hd, — de 3 hm, die 8-maal de 3e periode bevat, bij de van 8-maal de 2e periode overgebleven 616 hm, enz., dan blijkt, dat het verlangde product 43,47619 bedraagt.

a. Moet men met 0,008 vermenigvuldigen, dan vermenigvuldigt men met 8 en verplaatst de komma drie cijfers naar links, enz.

§ **261. Tweede geval.** *De vermenigvuldiger is een eindigend getal van meer dan één cijfer.*

Men berekent de gedeeltelijke producten als in het 1e geval en bepaalt hun som volgens § 256; bv.:

0,3 × 6,3245 = 1,89735 = 1,89735
6 × 6,3245 = 37,9471 = 37,94714
20 × 6,3245 = 126,490 = 126,49049
166,33499.

§ **262. Derde geval.** *De vermenigvuldiger is een repeteerende breuk.* Bv.:

	I	II	III	IV	V	
0,091584						
3,563	I	II	III	IV	V	
0,2747	52	47	52	47	52	. . .
457	92	07	92	07	92	. . .
57	69	80	19	80	19	. . .
	57	69	80	19	80	. . .
		57	69	80	19	. . .
			57	69	80	. . .
				57	69	. . .
					57	. . .
						. . .
0,3263	72	63	72	63	68	. . . = 0,32637.

FIGUUR 2

vermenigvuldigtal ook vermenigvuldigen met de som van de vermenigvuldigers der termen. Bv.:
$(5 + 8)\cdot a = 5\cdot a + 8\cdot a$
Want men heeft $(5 + 8)\cdot a$ = de som van 5 + 8 termen a = de som van 5 termen a + de som van 8 termen $a = 5\cdot a + 8\cdot a$.» Waar wij, zonder direct de distributieve eigenschap toe te passen, zouden zeggen $(5 + 8)\cdot a = 13\cdot a$, immers de haakjes geven aan dat we eerst moeten optellen; en vervolgens $5\cdot a + 8\cdot a = 13\cdot a$, immers $5\cdot a = a + a + a + a + a$ en $8\cdot a = \ldots$; met dan de conclusie dat $(5 + 8)\cdot a = 5\cdot a + 8\cdot a$ inderdaad juist is.

«**§65. Bepalingen.** Als een macht en de exponent gegeven zijn, dan leert de worteltrekking het grondtal vinden. De gegeven macht (a) heet het getal waaruit de wortel getrokken moet worden, ook wel het getal onder het wortelteeken; de gegeven exponent (b) behoudt den naam exponent, en het gevraagde grondtal wordt wortel genoemd.
Men zegt dat de b^e-machtswortel uit a moet worden getrokken, en schrijft:
$\sqrt[b]{a}$ (lees: de b^e-machtswortel uit a)
Zo beteekent $\sqrt[3]{8}=2$, dat $2^3 = 8$, en $\sqrt[4]{81}=3$, dat $3^4 = 81$ is.»
Nee, Gravelaar merkt in dit geval niets op over vormen als $\sqrt[3]{-8}$ of $\sqrt[4]{-81}$; zijn definitie van getal komt immers overeen met die van ons voor natuurlijk getal.

Maar wat te denken van een paragraaf over de commutatieve en associatieve eigenschappen.
«**§80.** Een bewerking, aangeduid met het teken $\circ$, heet commutatief, als $a \circ b = b \circ a$, en associatief, als $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ is.
Zoo zijn de optelling en de vermenigvuldiging zoowel commutatief als associatief, terwijl de machtsverheffing noch commutatief noch associatief is; want in het algemeen is a^b niet $= b^a$ en $(a^b)^c$ niet $=a^{(b^c)}$. Een bewerking, aangeduid door het teken $\circ$, heet distributief ten aanzien van een bewerking, aangeduid door het teeken $\uparrow$:
1. als $(a \uparrow b) \circ c = (a \circ c) \uparrow (b \circ c)$;
2. als $a \circ (b \uparrow c) = (a \circ b) \uparrow (a \circ c)$.
In het 1e geval noemt men de bewerking o distributief ten opzichte van den eersten term, in het 2e geval distributief ten opzichte van den tweeden term.
Gelden beide formules, dan heet de bewerking $\circ$ volkomen distributief ten aanzien van de bewerking $\uparrow$.
Zoo is de vermenigvuldiging volkomen distributief ten aanzien van de optelling. De machtsverheffing daarentegen is onvolkomen distributief ten aanzien van de vermenigvuldiging; want $(a\cdot b)^c = a^c\cdot b^c$, maar $a^{b\cdot c}$ in het algemeen niet $=a^b\cdot a^c$.
Een commutatieve bewerking $\circ$ kan niet onvolkomen distributief zijn ten aanzien van een bewerking $\uparrow$; want als de bewerking $\circ$ commutatief is, dan zijn de formules:
$(a \uparrow b) \circ c = (a \circ c) \uparrow (b \circ c)$ en
$a \circ (b \uparrow c) = (a \circ b) \uparrow (a \circ c)$
tegelijk waar of niet waar.»

Opdracht aan de lezer – Ga dit zelf na!
Overigens, in de *Opgaven ter Toepassing* vinden we geen vraagstukken over deze paragraaf.

Deelbaarheid

Opmerking vooraf. Waar Gravelaar soms spreekt over «n-deelig», spreken wij over n-tallig.
«**§162.** *Kenmerk voor* 11, *d.i. een deler van* 99, *in het tientallig stelsel.*
1) Elk tiendeelig getal = een 11-voud + de som der getallen, die men krijgt, als het gegeven getal in vakken van twee cijfers verdeeld wordt, te beginnen aan de rechterhand:

$$\begin{aligned}a_5{\cdot}a_4a_3{\cdot}a_2a_1 &= a_5\cdot 10^4 + a_4a_3\cdot 10^2 + a_2a_1\\ &= a_5\cdot(\text{99-voud}+1) + a_4a_3(\text{99-voud}+1) + a_2a_1\\ &= \text{een 99-voud} + a_5 + a_4a_3 + a_2a_1\end{aligned}$$

2) Elk tiendeelig getal geeft bij deeling door 11 dezelfde rest als de som der getallen, die men krijgt, als het gegeven getal in vakken van twee cijfers verdeeld wordt, te beginnen aan de rechterhand.
3) Elk tiendeelig getal is deelbaar door 11, als ... Enz.
Stelling. *Opdat een tiendeelig getal deelbaar zij door* 11, *is het noodig en voldoende, dat de som der getallen, die men krijgt, als het gegeven getal in vakken van twee cijfers verdeeld wordt, te beginnen aan de rechterhand, deelbaar zij door* 11.
(...)
§164. Op dezelfde wijze vindt men in het n-tallig stelsel kenmerken voor $n - 1$, $n^2 - 1$, $n^3 - 1$, ... en voor de delers van die getallen. Want:
1) Elke term der schaal van het n-tallig stelsel = een $(n - 1)$-voud + 1.
Zoo is

$$\begin{aligned}n^5 &= n^5 - n^4 + n^4 - n^3 + n^3 - n^2 + n^2 - n + n - 1 + 1\\ &= (n-1)\cdot n^4 + (n-1)\cdot n^3 + (n-1)\cdot n^2 + (n-1)\cdot n + (n-1) + 1\\ &= \text{een } (n-1)\text{-voud} + 1\end{aligned}$$

2) Elke term der schaal van het n-tallig stelsel, die op 2, 4, 6, 8, ... nullen eindigt = $(n^2 - 1)$-voud+1.

Zoo is

$$\begin{aligned}n^8 &= n^8 - n^6 + n^6 - n^4 + n^4 - n^2 + n^2 - 1 + 1\\ &= (n^2-1)\cdot n^6 + (n^2-1)\cdot n^4 + (n^2-1) + 1\\ &= \text{een } (n^2-1)\text{-voud} + 1\end{aligned}$$

3) Elke term der schaal van het n-tallig stelsel, die op 3, 6, 9, 12, ... nullen eindigt is een $(n^3 - 1)$-voud + 1.
Enz.
Dus is elk getal, dat onderling ondeelbaar is met het grondtal n, een deeler van een macht van n min één, m.a.w. van een term der schaal van het n-tallig stelsel min één.»

We vinden in de *Opgaven ter Toepassing* natuurlijk een groot aantal vraagstukken over deelbaarheid.

Drie opdrachten aan de lezer

«**64.** Plaats men in een tiendeelig getal van zes cijfers, dat deelbaar is door 37, de twee cijfers, die aan de rechterhand staan, vooraan, dan krijgt men een getal, dat nog deelbaar is door 37.»

«**209.** Het verschil van twee n-deelige getallen die met dezelfde cijfers geschreven worden, is deelbaar door n – 1.»

«**213.** Bepaal a en b zóó, dat $9083b1a$ deelbaar zij door 72.»

Evenredigheden

Uiteraard wordt er in beide leerboeken ook de nodige aandacht besteed aan evenredigheden. Wanneer we onze huidige leerboeken er op naslaan, dan komen we die term sporadisch tegen. Echter, formules

als $s = vt$, $O = \pi R^2$, $K_n = K_0(1+i)^n$ en $n = \frac{\mu}{l}\sqrt{\frac{p}{ds}}$

vinden we zeker terug in onze boeken, maar dan in combinatie met termen als (recht)evenredig en omgekeerd evenredig[3].

Gravelaar geeft in §418 – we maken inderdaad een fikse sprong door de boeken – het volgende voorbeeld, waarin we een opgave uit het huidige rekenonderwijs (maar niet de prijzen) zeker herkennen.

«Als $3\frac{1}{4}$ KG kaas f 2,60 kost, hoeveel moet men dan voor $12\frac{1}{2}$ KG betalen?

Zij de gevraagde prijs = $f\,x$, dan kan men opschrijven:

Hoeveelheid:	Prijs:
$3\frac{1}{4}$ KG	2,6 gld.
$12\frac{1}{2}$ KG	x gld.

Nu is de prijs eener hoeveelheid koopwaar – en daarnaar wordt hier gevraagd – recht evenredig met de grootte der partij; want als men de hoeveelheid n-maal zoo groot neemt, dan wordt ook de prijs n-maal zo groot.

Om die reden heeft men:

$$2{,}6 : x = 3\tfrac{1}{4} : 12\tfrac{1}{2}$$

dus: $x = \dfrac{2{,}6 \times 12\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}} = 10$.»

Het voorbeeld dat in figuur 1 op pagina 211 staat – het komt ook uit het hoofdstuk ‘Evenredigheid van grootheden’, in deel 2 – wil ik de lezer evenmin onthouden.

Opdracht aan de lezer – Probeer eerst zelf het antwoord te vinden alvorens verder te lezen.

Gravelaars oplossing

«Omdat de snelheid van de trein afhangt van de hoeveelheid steenkool die per KM verbruikt wordt, en van het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat, zal de duur van de spoorreis afhankelijk zijn van den af te leggen afstand, van de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt, en van het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat.

Om te weten te komen, op welke wijze de duur der reis afhangt van de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt, stelle men zich voor, dat die hoeveelheid n-maal zoo groot wordt genomen, terwijl de af te leggen weg en het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat, dezelfde blijven.

Omdat de snelheid van de trein recht evenredig is met den 2e-machtswortel van de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt, en deze hoeveelheid n-maal zo groot wordt, zal de snelheid van de trein $\sqrt{n}$ -maal zoo groot worden en de duur van de reis, die omgekeerd evenredig is met de snelheid van de trein, $\sqrt{n}$ -maal zoo klein. Wordt dus de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt, n maal zoo groot, dan wordt de duur der reis $\sqrt{n}$ -maal zoo klein: de duur van de reis is dus omgekeerd evenredig met den 2e-machtswortel van de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt.

Evenzoo vindt men, dat de duur van de reis recht evenredig is met het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat.

Zij nu de duur van een spoorreis = d minuten, de af te leggen afstand = a KM, de hoeveelheid steenkool, die per KM verbruikt wordt s KG en het aantal rijtuigen, waaruit de trein bestaat = r, dan is dus d recht evenredig met a, omgekeerd evenredig met $\sqrt{s}$ en recht evenredig met r, zoodat men algemeen heeft:

$$d_1 : d_2 = \frac{a_1 r_1}{\sqrt{s_1}} : \frac{a_2 r_2}{\sqrt{s_2}}$$

Vervangt men in deze evenredigheid d_1 door 30, d_2 door 28, a_1 door 25, a_2 door 21, r_1 door 18, r_2 door 16, s_1 door $506\frac{1}{4} : 25 = 20\frac{1}{4}$, dan vindt men s_2 = 12,96, zoodat bij de 2e spoorreis per KM 12,96 KG steenkool verbruikt wordt.»

Rekenen met getallen

Uiteraard wordt er veel aandacht besteed aan het rekenen met getallen – er waren immers nog geen rekenmachines. En zonder is het zeker niet eenvoudig...

Wie zich bijvoorbeeld afvraagt hoe je de vermenigvuldiging aanvat van repeterende breuken, kan natuurlijk bij Gravelaar terecht. Zie daarvoor figuur 2 op pagina 212.

Opdracht aan de lezer – Vind het algoritme waarop de vermenigvuldiging van twee repeterende breuken in §262 is gebaseerd.

Gravelaar als geleerde

In de kop van dit artikel staat: ‘Hij verstond de kunst, een onderwerp zo aan te vatten, dat het na de les eigendom was geworden van de aandachtige leerlingen. Als geleerde stond hij zeker nog hoger.’ Deze tekst is afkomstig van de website van de Stichting Oude Begraafplaatsen Deventer[4]. Op die website vinden we ook een afbeelding van Gravelaar,

alsmede een foto van zijn grafsteen.
Ik kan (uiteraard) niet ingaan op de juistheid van de eerste zin van het citaat, maar in de rekenboeken vinden we hoegenaamd geen didactische handreikingen aan de toekomstige onderwijzer.
Echter, de tweede zin in het citaat intrigeerde me. Gravelaar als geleerde? Ook nu bracht het internet uitkomst. Naast wat genealogische informatie (zoals de namen van zijn ouders) vinden we op de website van Jan Hogendijk (Mathematisch Instituut, Utrecht)[5] de naam Gravelaar een aantal keren vermeld, met daarachter zijn wetenschappelijke artikelen, waaronder:
- *Over de logarithmen van Neper*, in: *Supplement op de Vriend der Wiskunde* 4 (1892), pp. 103-116.
- *Pitiscus' Trigonometria*, in: *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) 3 (1898), pp. 253-278.
- *John Napier's werken*. Verhandelingen der Koninklijke Academie der Wetenschappen Amsterdam (1e sectie), 6, no. 6 (1899). 159 pp.
In het recent verschenen boek *Writing the History of Mathematics*[6] staat op pagina 54, in de paragraaf 'Historiography of Mathematics in the Netherlands after 1830', het volgende.

'In addition to biographical, cultural and historical aspects, the history of mathematical ideas and problems began to occupy an increasingly important place. This shift is illustrated by the historical studies of Nicolaas L.W.A. Gravelaar (1851-1913), lecturer at the teacher training college in Deventer. His publications on Pitiscus's (1561-1613) *Trigonometria* and the works of John Napier are characterized by great accuracy and scrupulous study of the sources.'

In het genoemde boek staat ook een korte biografie van Gravelaar (zie [6], p. 438), en in 1929 schreef Dirk Struik over hem in Euclides[7].
Hogendijks lijst telt slechts één boek van Gravelaars hand, namelijk *John Napier's werken*. Dit boek heeft 159 pagina's en bevat een levensbeschrijving van Napier[8] alsmede een herdruk, vertaling en toelichting van de wiskundige boeken van Napier (1566-1617), de 'uitvinder' van de logaritme en de *rabdologia*, de roerekening (het werken met rekenbalkjes)[9].
Uit die vertaling (hij staat ook in mijn boekenkast) blijkt zeker, dat Gravelaar als geleerde kan worden beschouwd. Hij hoort dan ook in de rij van Nederlandse wiskundigen die belangrijke bronnen uit het verleden toegankelijk hebben gemaakt in onze taal.

Noten, verwijzingen

[1,2] Ik handhaaf in dit artikel de in Gravelaars boeken gebruikte spelling. Letterlijke citaten staan daarbij tussen « en ».
[3] Zie bijvoorbeeld het Nomenclatuurrapport Tweede fase havo en vwo (NVvW, 1999) op www.nvvw.nl/nomenclatuur.html.
[4] www.sobd.org/totbekende_personen.htm
[5] www.math.uu.nl/people/hogend/ en dan klikken op Bibliografie.
[6] Joseph W. Dauben, Christoph J. Scriba (editors): Writing the History of Mathematics: Its Historical Development. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002.
[7] Dirk J. Struik: N.L.W.A. Gravelaar (1851-1913). In: Euclides 6 (1929), pp. 204-207.
[8] Zie ook: http://13.1911encyclopedia.org/N/NA/NAPIER.htm
[9] Zie de (Engelse) website van Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Napier's_bones), en de website van de GMFW, waarop een (gedeeltelijke) vertaling van Napiers Rabdologiae door Adriaan Vlacq (1626) is opgenomen (www.kun.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/vlacq1.html).

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.

VERRIJKEN DOOR VERMIJDEN; DE REKENMACHINE OP DE BASISSCHOOL

[Jan van den Brink]

Historie

De invoering van de rekenmachine op de basisschool vond al weer lang geleden plaats. Sinds 1993 gelden voor het Nederlandse basisonderwijs voor vier- tot twaalfjarigen officiële kerndoelen. Onder die voor het rekenen is er één over de rekenmachine. Hij luidt: *De leerlingen kunnen de rekenmachine met inzicht gebruiken*. Dat klinkt mooi, maar hoe doe je dat in de klas?

Op verzoek van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen werd vanaf 1997 binnen het TAL-project (Tussendoelen Annex Leerlijnen) gewerkt aan tussendoelen bij de kerndoelen, met aansluitend onderwijsbeschrijvingen. Eén van de brochures van dat project (TAL-team, 2000) was gewijd aan het rekenen met hele getallen voor de groepen 5 tot en met 8 (acht- tot twaalfjarigen). Het ging daarbij vooral om het nastreven van een 'gecijferde' houding bij leerlingen, een zekere gevoeligheid op te roepen voor getalsmatige gegevens in eenvoudige toepassingssituaties en om in die situaties berekeningen handig te kunnen organiseren. En nu komt het: om deze gecijferdheid te bereiken moesten het *hoofdrekenen* en het *schattend rekenen* alsmede het verstandig gebruik van de *rekenmachine* geaccentueerd worden, ten koste van het *cijferend rekenen*. Dat was de boodschap.

De rekenmachine speelde daarin dus een belangrijke rol. In 2000 waren op driekwart van alle basisscholen rekenmethoden in gebruik die reeds aandacht besteedden aan de rekenmachine, zij het op verschillende wijzen.

De meeste methoden voerden de machine in vanaf medio groep 7 (leerlingen van tien tot elf jaar), sommige methoden eerder. Soms stapsgewijs gekoppeld aan een soort handleidingentaal, soms als additioneel materiaal, bijvoorbeeld gebonden aan een serie werkkaarten.

Ook in het voortgezet onderwijs waren verschillen. In het ene wiskundeboek wordt een heel hoofdstuk aan de rekenmachine gewijd, terwijl in een andere methode de machine opnieuw geïntroduceerd en toegepast wordt binnen elk nieuw wiskundeonderwerp.

F IGUUR 1 De Wescal Alpha-15



Opvallend is ook de aandacht voor de machine zelf. De NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs) heeft geijverd voor een nieuw model rekenmachine met, om didactische redenen, twee bijzondere kenmerken:

a. een tweeregelig venster om zicht op de vorm van de rekenopgave te houden, en

b. voorzien van haakjes om 'Meneer Van Dalen' te tackelen.

Tot onze vreugde is een dergelijke machine ook echt ontworpen (zie figuur 1): de *Wescal Alpha-15*. (Zie voor deze en andere rekenopties op rekenmachines bijvoorbeeld: Van den Brink, Moerlands, De Moor & Vermeulen, 2000.)

De rekenmachine is nu dus ruim tien jaar officieel in het Nederlandse onderwijs aanwezig. Maar hoe? Als 'organisch' onderdeel van het rekenonderwijs? Of als hulpmiddel, 'prothese'? Als vervanger van het rekenen?

1. 1200 : 6 =
2. 6 × 249 =
3. 250 × 40 =
4. 1495 : 5 =
5. 120 kauwgomballen in zakjes van 5.
   Hoeveel zakjes?
6. 5 × 257 =
7. 1201 - 1197 =
8. 1275 + 1275 + 1275 + 1275 =
9. 499 + 499 =
10. De rekenles begint om 8.45 uur. De les duurt 55 minuten.
    Hoe laat is de les afgelopen?

FIGUUR 2 Rekenmachinedictee

De machine mijden

Schrijvers van rekenmethoden zien de machine meestal als reken- en controlemiddel ('ga na op je machine of je antwoord goed is'), als een hulpstuk. Maar hij is ook als didactisch middel te gebruiken om de rekenbegrippen te verdiepen. In dit laatste steken goede verrijkingsmogelijkheden voor de bovenbouw van de basisschool. Daarbij gaat het er gek genoeg om, het gebruik van de rekenmachine zoveel mogelijk te *mijden*. Nu de machine via het kerndoel in de rekenmethoden wordt 'opgedrongen', kan het een verrijking zijn voor het rekenen als je niet alleen leert waar je hem *zinvol* kunt inzetten, maar ook waar je hem beter *niet* kunt gebruiken.

Handig hoofdrekenen en de rekenmachine

> *Een schaatser doet over één ronde 2 minuten en 11 seconden. Hij rijdt met constante snelheid. Hoe lang doet hij over 60 ronden?*
> *Een zak aardappels van 2½ kilo kost 1 euro 50. Hoeveel is dat per kilo?*

Met de rekenmachine eist het schaatsenrijdersprobleem heel wat handelingen om te ontdekken dat de uitkomst 2 uur en 11 minuten is (elke uur is 60 minuten en elke minuut is 60 seconden). De opgave is gekunsteld, maar verrast de leerlingen wel. Je kan hem ook met een combinatie van hoofdrekenen en gebruik van de machine te lijf gaan: 2 uren + 11 minuten = 131 minuten, dan keer 6 met de rekenmachine.
Op de rekenmachine blijkt de aardappelprijs 0,60 euro per kilo te zijn. Maar ook dat had sneller uit het hoofd gekund: 2½ kilo kost 1 euro 50, 5 kilo kost 3 euro, 10 kilo kost 6 euro.
Het is niet altijd nodig - en soms ongewenst - om direct naar de rekenmachine te grijpen. Leerlingen ontdekken dat sommige sommen gemakkelijker uit het hoofd gaan dan op de rekenmachine, omdat de hulp die de rekenmachine biedt 'georganiseerd' moet worden en dat kost veel tijd. De kernvraag tot de verrijking luidt: Is het wel nodig om de rekenmachine in te zetten?

Een belangrijk didactisch hulpmiddel om leerlingen de beslissing tussen hoofdrekenen en de rekenmachine te laten maken is het zogenoemde *rekenmachinedictee*, als variant op het aloude hoofdrekendictee. Het gaat om een korte activiteit die met de hele groep wordt gedaan.

Rekenmachinedictee (zie figuur 2)
Een dergelijk dictee bevat tamelijk eenvoudige opgaven.
Had het zin om de rekenmachine te gebruiken? Ja, maar je moet het wel per som bekijken, niet blind toepassen op de hele rij opgaven. De opgaven 1, 2, 3, 5, 7 en 9 zijn immers met wat handig hoofdrekenen en schattend rekenen op te lossen. Opgaven 4, 6 en 8 vragen om een grotere handigheid in getallen, maar kunnen op de rekenmachine worden gecontroleerd. Bij opgave 10 werkt de rekenmachine juist tegendraads. Laat de kinderen per som een keuze maken tussen rekenen en de machine. Je zou bijvoorbeeld óók kunnen kijken wie er de meeste met hoofdrekenen kon oplossen en ook nog de minste fouten heeft.

> *Van de rekenmachine werkt de 4-knop niet.*

Een dergelijke situatie komt praktisch nooit voor, maar is wel een geschikt denkbeeld om speels het hoofdrekenen (het gebruik van getalleneigenschappen) uit te lokken.
Hoe kun je toch de volgende sommen met deze gehandicapte machine uitrekenen?
34 × 676 =
43 × 676 =
33 × 674 =
44 × 676 =
44 × 444 =

De eigenschappen van bewerkingen zoals
34 × 676 = (33 × 676) + (1 × 676)
en
43 × 676 = (33 × 676) + (10 × 676)
zijn plotseling 'nuttig' om te kennen. Ook de halverings/verdubbelings-eigenschap kan worden toegepast:
44 × 444 = 22 × 888.
Het 'organiseren' van je rekenmachine bij een probleem, gegevens handig bij elkaar nemen, gebruik

4,17	12,37
12,33	12,37
0,88	12,37
0,88	12,37
37,02	12,37
2,33	12,37
25,00	12,37
24,95	12,37
3,11	12,37
	12,37

FIGUUR 3 Kassabonnenspel

maken van de eigenschappen van getallen - het heeft iets algebraïsch: je hoeft zelf niet te cijferen, alleen maar gegevens aan elkaar te schakelen en het cijferen aan de machine over te laten.

Schattend rekenen en de rekenmachine

In de rekenmethoden is *controle* op de orde van grootte van een uitkomst op de rekenmachine een belangrijke activiteit. Stel je wil de precieze uitkomst van 120 765 + 750 088 weten, maar op de machine verschijnt 195 853. Dan moet je toch beseffen dat dit wel fout móét zijn door duizend als maat te nemen. Activiteiten zoals het hierna beschreven kassabonnenspel kunnen kinderen richten op dit soort schattend gebruik van de rekenmachine.

Kassabonnenspel

De kinderen krijgen een werkblad waarop een aantal kassabonnetjes staat (zie figuur 3).

> *Schat de totalen. Controleer met de rekenmachine.*

Juf legt het spel uit: 'Speel het met z'n tweeën. Elke speler schat wat alles samen kost op de eerste bon en schrijft dat op. Je kan er boven of er onder zitten. Dan controleer je samen met je tegenstander de schattingen op jullie rekenmachines. Wie er het dichtste bij zit heeft gewonnen. Het kan ook gelijkspel worden.'

Het is bij dit spel één en al controle wat de klok slaat: controle op de rekenmachine, controle van de rekenmachine, controle van elkaar. Dit controleren van de schatting door de rekenmachine en omgekeerd van de uitslag op een rekenmachine via een schatting van de orde van grootte is een essentieel punt in het ontwikkelen van een kritische houding bij het gebruik van de rekenmachine. Dat geldt ook voor de machine zelf. 'Haakjes' en andere opties op de machine kunnen aanleiding zijn tot een levendig *onderzoek* van verschillende machines (zie figuur 4).

De opgave 70 + 1 × 447 = ... is voor tweeërlei uitleg vatbaar. Sommige machines die geen haakjes hebben, geven als antwoord 517 [70 + (1 × 447) = 517, volgens Meneer Van Dalen], maar er zijn machines die het op 31737 houden [(70 + 1) × 447 = 31737, van links naar rechts lezend].

Zonder haakjes op de machine is het maar afwachten wat hij doet en je vraagt je af, hoe je zo'n machine tóch naar je hand kunt zetten. Wat zal er ongeveer moeten uitkomen? Handig rekenen en het schatten van uitkomsten zijn daarbij van nut.

Naast onderzoek van de machines zijn kinderen gek op spelletjes. 'Omgekeerde' antwoorden als woorden lezen, is zo'n spel. Op een machine met haakjes kun je voor dezelfde opgave 70 + 1 × 447 = ... het woord LIS als omgekeerd (ant-)woord krijgen, maar ook het woord LELIE. Zijn er meer van dergelijke sommen te vinden die twee woorden per som opleveren afhankelijk van waar je de haakjes plaatst? Niet eenvoudig.

Een foutje 'onderweg' is in het begin zó gemaakt. Ook dat is een gegeven waar leerlingen verdacht op moeten zijn.

434 × 602 = 1036 geeft de machine. Een foutje? Controleer via schattend rekenen: 400 × 600 = 240000; via cijferend rekenen: door vermenigvuldigen van 2 en 4 kan het laatste cijfer nooit een 6 zijn.

Cijferend rekenen en de rekenmachine

Wil je de exacte uitkomst van 98 765 × 4321 = ... uitrekenen op de machine, dan is de kans groot dat dit tot problemen leidt. Een eerste schatting toont: 100 000 × 4 000 = 400 000 000.

In veel machinevensters passen slechts 9 cijfers. Voer je het toch uit, dan krijg je bijvoorbeeld als antwoord 4.2676356^{E+8}. Dit type antwoord geeft met de plaats van de punt wel aan dat er maar één cijfer aan het eind ontbreekt. Dat eindcijfer moet een 5 zijn, gezien de gebruikte factoren. Het antwoord is dus 426 763 565.

Het cijferen en de rekenmachine kunnen dus op verschillende wijzen op elkaar worden afgestemd.

Bij een wat gekunstelde opgave zoals 100 000 123 × 123 = ... helpt deze aanpak niet. De vermenigvuldiging is echter op te schrijven in *deelproducten* die wel bepaald kunnen worden: uit het hoofd met de 'nulregel' [100000000 × 123 = 12 300 000 000] en op de rekenmachine: 123 × 123 = 15129 en tenslotte op papier in een goede positie:



FIGUUR 4

$$\begin{array}{r} 12\,300\,000\,000 \\ 15\,129 \\ \hline 12\,300\,015\,129 \end{array} +$$

Om *grote vermenigvuldigingen* te maken zijn inzicht in het algoritme en in het positiestelsel vereist en wordt de leerling gevraagd de rekenmachine en het cijferen op papier op een pientere wijze te combineren.
De rekenmachine kan ook de samenhang tussen de *hoofdbewerkingen* opnieuw aan het licht brengen. Rekenmachines hebben de constante opteller (+5 = = = = ...) waarmee opnieuw de vermenigvuldiging als herhaalde optelling kan worden gezien. Met aftrekken kan nog eens in herinnering komen dat delen in feite herhaald aftrekken is, al of niet met een rest ongelijk nul.

> *Start met 1342. Hoeveel maal is daar 72 vanaf te halen?*

1342 – 72 = = = ..., tot rest 46 overblijft; een heel precies werkje overigens.

Ook vermenigvuldigen met 10 en de effecten daarvan zijn op de machine te herhalen, evenals het verband tussen inverse bewerkingen:

> *Met welke vermenigvuldiging kun je de uitkomst van de deling 1080 : 135 = 8 controleren?*

Juist bij het machinerekenen hebben deze controles zin; ze zijn bovendien gemakkelijk uit te voeren (1080 : 135 = 8, dus 8 × 135 = 1080).

In het bijzonder kunnen delingen met rest een onderwerp van onderzoek zijn.

> *Bereken de rest van de deling 1342 : 72.*

Op een rekenmachine levert de deling 18,638888 op. De uitkomst bevat dus in ieder geval het hele deel 18. De deler (72) is dus 18 maal van het deeltal afgetrokken. De rest moet zijn: 1342 – (18 × 72) = 46. De formele omkering 72 × 0,638888 = 45,999936 levert een ander getal en discussie op.

Samenvatting

In de onder- en middenbouw van de basisschool moet gecijferd worden teneinde de hoofdbewerkingen aan te leren en te oefenen. Maar in de bovenbouw is maandenlang cijferen funest. Het moet geleidelijk aan worden teruggedrongen. Andere vormen van rekenen (hoofdrekenen, schattend rekenen en rekenmachinegebruik) zijn van groter belang dan het blote cijferen om de 'gecijferdheid' bij kinderen te bevorderen (TAL-team, 2000).
Leerlingen moeten in de bovenbouw vooral *kritisch* met de rekenmachine leren omgaan: 'Hoofdrekenen gaat soms veel sneller dan m'n machine', 'Je moet van te voren de uitkomst al wat inschatten.' Ze leren dit in spelletjes en didactische werkvormen, waarvan er hier enkele zijn beschreven (rekenmachinedictee, kassabonnenspel). Deze kunnen wellicht af en toe ook in het *voortgezet* onderwijs worden herhaald, zo dit al niet wordt gedaan.

Literatuur

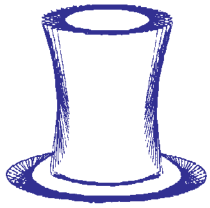
- *Jan van den Brink: Worstelen met de zakrekenmachine. In: M. Meeder, L. Spijkerboer: Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde SW12-16. Utrecht: NVvW en APS (1993), pp. 35-44.*
- *TAL-team (M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys, A. Treffers, eds): Kinderen Leren Rekenen, Tussendoelen Annex Leerlijnen, Hele Getallen Bovenbouw Basisschool. Utrecht/Enschede: Freudenthal Instituut/SLO (2000).*
- *E. de Moor, J. van den Brink: Rekenmachine. In: TAL-team: Kinderen Leren Rekenen, Tussendoelen Annex Leerlijnen, Hele Getallen Bovenbouw Basisschool, Utrecht/Enschede: Freudenthal Instituut/SLO (2000), pp. 123-146.*
- *F.J. van den Brink, F. Moerlands, E.W.A. de Moor, W. Vermeulen: Voorstel voor een Nieuw Model Rekenmachine. NVORWO (2000).*

Over de auteur

Dr. Jan van den Brink (e-mailadres: J.vandenBrink@fi.uu.nl) is werkzaam bij het Freudenthal Instituut. Hij was als ontwerper en onderzoeker lid van het TAL-team.

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR

[Job van de Groep]



Inleiding

Goochelaars gebruiken voor een aantal van hun ‘mentale’ acts (gedachtelezen bijvoorbeeld) soms rekenkundige trucjes. Door de wijze van presentatie -en dat is bij goochelen het belangrijkst!- kunnen die op zich vaak eenvoudige foefjes een magische uitstraling krijgen. Ze roepen daardoor nieuwsgierigheid en verwondering op.
De klassensituatie is een uitstekend decor voor een dergelijk mysterieus gedoe - het publiek is al aanwezig! Er zijn immers genoeg momenten, waarop je als docent even iets anders, iets bijzonders wilt doen. Bijvoorbeeld om de aandacht van de leerlingen (weer) te vangen of gewoon om de laatste les voor de vakantie met iets leuks te vullen.
Voor de deelnemers aan mijn workshop *Gegoochel met getallen* tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1999 stelde ik een boekje samen met goocheltrucs met getallen, waarvan een aantal gebaseerd is op dit soort rekenfoefjes. Hiervan beschrijf ik er in deze bijdrage drie. Het gaat om eenvoudige rekentrucs die zonder al te ingewikkelde voorbereidingen vertoond kunnen worden, vanzelfsprekend met inachtneming van het principe ‘Oefening baart Kunst’: de meeste voorbereidingstijd zal aan de voordracht besteed moeten worden...
Sim Sala Bim!

Advies

Het direct na de voorstelling zomaar verklappen van de truc, het ‘geheim’, moet ten strengste ontraden worden: de opgeroepen schijn dat men ‘wonderen’ kan verrichten, gaat dan onmiddellijk verloren... Op een later tijdstip, maar alleen als leerlingen daar zelf mee komen, kan ~~dan~~ eventueel worden ingegaan op de gehanteerde wiskundige principes, bijvoorbeeld in de vorm van een onderzoeksopdrachtje. Suggesties daartoe zijn onder het kopje *Transfer naar de les* opgenomen.

Truc 1: Welke kaarten?

Verloop

De goochelaar laat iemand uit het publiek uit een spel twee kaarten trekken. Deze persoon moet het getal op één van de twee kaarten (Aas = 1, Boer = 11, Vrouw = 12 en Heer = 13) met 5 vermenigvuldigen en vervolgens 7 optellen bij het product. Dat resultaat moet vermenigvuldigd worden met 2. Tenslotte wordt de waarde van de andere kaart bij dat product opgeteld. Die som meldt de toeschouwer/helper aan de goochelaar. Onmiddellijk vertelt de goochelaar welke twee cijfers er op die getrokken kaarten stonden.

Verklaring

Van het eindresultaat wordt 14 afgetrokken. De cijfers van het laatste getal geven de getallen op de betreffende kaarten aan.
Voorbeeld. De toeschouwer trekt schoppen-2 en klaveren-9 en vermenigvuldigt 9 met 5, telt daar vervolgens 7 bij op en vermenigvuldigt het eindresultaat nog met 2; $((9 \times 5 + 7) \times 2 = 104$.
Bij dat getal wordt dan nog de 2 van schoppen-2 opgeteld: 106. Als hiervan 14 wordt afgetrokken, geven de cijfers van het verschil (92), de cijfers 9 en 2 op de twee kaarten aan.
Als aan een Aas de waarde 1, aan een Boer de waarde 2, aan een Dame de waarde 3 en aan een Heer de waarde 4 wordt gegeven, kunnen de plaatjes natuurlijk gewoon in het spel blijven zitten.
Op dezelfde manier kan van een worp met twee dobbelstenen de geworpen aantallen ogen worden herleid.

Transfer naar de les

Er zijn meer van dit soort eenvoudige rekenfoefjes te bedenken - ook met drie getallen (kaarten, dobbelstenen). Zoals ...?

Truc 2: Het kalenderblad

Verloop

De goochelaar toont een willekeurig blad van een maandkalender; zie figuur 1. Dat is een rechthoek met in totaal 30 of 31 getallen (in februari 28 of 29). Op de plaatsen linksboven en/of rechtsonder staan geen getallen afgedrukt. Zonder dat de goochelaar

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

FIGUUR 1

het ziet mag een toeschouwer op het blad een vierkant tekenen waarin precies negen getallen zitten. Dat wordt dus een vierkant van drie bij drie getallen. De goochelaar krijgt alleen te horen welk getal binnen dat vierkant het kleinste is (dat staat altijd linksboven), en hij noteert vervolgens de som van die negen getallen op een blaadje - onzichtbaar voor de toeschouwer. De toeschouwer wordt gevraagd de negen getallen bij elkaar op te tellen. Daarna toont de goochelaar het resultaat van zijn supersnelle rekenkunst.

Verklaring

Bij het kleinste getal wordt 8 opgeteld. Die som wordt vervolgens met 9 vermenigvuldigd.
Voorbeeld: De som van de negen gemarkeerde getallen in figuur 1 is $(10 + 8) \times 9 = 162$ (of negen maal het middelste getal, want de som van de getallen diagonaal tegenover elkaar is telkens 36).

Transfer naar de les

Geldt een dergelijk foefje voor elke willekeurige rechthoek die gevuld wordt met steeds groter worden getallen? Hoezo en waardoor/waarom?

Truc 3: Dwaas vermenigvuldigen

Verloop

Er worden door het publiek twee getallen genoemd die de goochelaar op een merkwaardige manier gaat vermenigvuldigen. Hij schrijft de twee getallen op het bord of flap-over. Onder het eerste getal noteert hij de helft (naar beneden afgerond), en onder het tweede getal het dubbele van het tweede getal. Hij herhaalt dit proces net zolang er onderaan de linkerrij een 1 staat. De getallen in de rechterkolom worden vervolgens bij elkaar opgeteld. De getallen, waarvoor in de linkerkolom een even getal staat, worden echter niet in de optelling meegenomen.

Voorbeeld.

23 × 17
11 × 34
5 × 68
~~2 × 136~~ (wegstrepen)
1 × 272 +
391

Verklaring

De verklaring moet gezocht worden in een binaire schrijfwijze en daarna vermenigvuldigen van getallen. 23 wordt in het tweetallig stelsel geschreven als 10111, 17 als 01001. Delen door twee met afronden op helen betekent weglaten van de laatste 0 of 1 van dat getal, vermenigvuldigen met 2 betekent een 0 achter het binaire getal schrijven. Enzovoorts.

Transfer naar de les

Ook in het kader van activerende didactiek leent deze truc zich erg goed voor een nader onderzoek door leerlingen, na een korte introductie van de binaire getallen.
Gaat die regel altijd op; hoe zit dat dan precies?

Noot

Deze trucs worden exclusief aan wiskundedocenten ter hand gesteld onder de uitdrukkelijke voorwaarde van geheimhouding. Daarom mag niets uit dit artikel worden vermenigvuldigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige ander manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de auteur, op straffe van mysterieuze verdwijning...

Over de auteur

Job van de Groep (e-mailadres: jvdgroep@wxs.nl) is, behalve wiskundedocent en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein, ook amateur-goochelaar.



Wiskobasteam anno 1972. V.l.n.r.: Edu Wijdeveld, Louis Gilissen (†1990), Fred Goffree, Henk Meijer, Jan van den Brink, Ed de Moor, Ineke Hoogeveen, Adri Treffers, Johan van Bruggen, Hans Freudenthal (†1990), Huub Jansen, Rob de Jong, Hans ter Heege, Leen Streefland (†1998)

HERINNERINGEN AAN WISKOBAS

Wat hebben we gedaan?
Wat doen we?
Wat zouden we nog moeten doen?

Georg Lichtenberg (1742-1799, Duits natuurkundige en schrijver)

[Ed de Moor]

Samenvatting

In de jaren zestig ontstond in de kring van de Nederlandse rekendidactici het initiatief tot vernieuwing van het toenmalige rekenonderwijs op de lagere school. Hieruit is het Wiskobasproject ontstaan, waaraan gedurende de jaren zeventig met grote inzet is gewerkt. De auteur van dit artikel was medewerker van dit project en blikt op persoonlijke wijze terug op de opvattingen en plannen van toen. Tevens wordt een globale balans opgemaakt van de effecten van dit werk op de huidige stand van zaken van het rekenonderwijs op de basisschool en op de Pabo.

Rekenonderwijs anno 1945

Mijn vader was onderwijzer in Amsterdam. Hij had de zesde klas en elk jaar moest hij een advies geven over zijn leerlingen voor hun vervolgonderwijs: gymnasium, hbs, mms, mulo of ambachtsschool. Ik zat niet op zijn school, maar niettemin bepaalde hij mijn verdere schoolcarrière. 'Jongen, dat rekenen van jou is niet al te best. Jij hebt meer aanleg voor talen dan voor wiskunde. Ga jij maar naar het Gymnasium.' Aldus geschiedde in de zomer van 1945. Eenmaal op die school haalde ik echter goede cijfers voor wiskunde. Bij algebra ervoer ik een aha-ervaring toen de leraar liet zien hoe je de denksommen van de lagere school met vergelijkingen kon oplossen. Wat had ik vaak geworsteld met vraagstukken als: 'Van een breuk zijn teller en noemer samen 90. Wordt de teller met 14 verminderd en de noemer door 3 gedeeld, dan blijft de waarde van de breuk gelijk. Bereken die breuk.' Hierbij was het zaak dat je een bepaald type herkende en daar dan een vaste oplossingswijze bij opriep. En dat liep nogal eens fout, omdat ik die als trucjes uit het hoofd had geleerd. Met de algebraïsche aanpak (noem de onbekende x) begreep ik dat er een algemene methode bestond, die altijd werkt.

Mijn vader heeft het niet meer meegemaakt dat ik uiteindelijk wiskunde ging studeren en dat ik zijn voorbeeld zou volgen: ik werd leraar. Ik bemerkte al snel dat veel kinderen problemen hadden met wat we toen het 'gewone rekenen' noemden. Ik begon de toelatingsexamens en de rekenboekjes te bestuderen, ging op bezoek bij lagere scholen en mocht lessen bijwonen in de zesde klas. Toen besefte ik dat veel van de rekenstof veel lastiger was dan de wiskunde van de eerste klassen van het toenmalige Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs (VHMO). De denksommen noemde ik al en die werden nog altijd gedaan, althans met de beste leerlingen. Maar voor alle kinderen omvatte de stof vraagstukken over procenten en verhoudingen, die heel lastig konden zijn. Er werd driftig in het metrieke stelsel gemarcheerd. En ten behoeve van de cijfervaardigheid, zowel met gehele getallen als met kommagetallen en breuken, waren er eindeloze rijen sommetjes. Veel onderwijzers oefenden gelukkig op hoofdrekenen, maar in het algemeen was er sprake van een nogal gemechaniseerd rekenonderwijs. Er werd vanuit het middelbaar onderwijs soms wat neerbuigend over het rekenonderwijs gedaan. Dat zinde me niet, maar ik wist ook niet wat ik aan dit 'aansluitingsprobleem rekenen-wiskunde' kon doen behalve dat ik me bleef inspannen om algebra en rekenen met elkaar in relatie te brengen. In feite ontbrak het me aan de nodige deskundigheid op dit gebied.

Ontstaan van Wiskobas

In 1961 werd de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) ingesteld. Hoewel de activiteiten vooral op het middelbaar onderwijs gericht waren, werd met name door Fred Goffree en Edu Wijdeveld met klem aandacht gevraagd voor het rekenonderwijs van de lagere school. Er kwam een subcommissie van de CMLW voor het basisonderwijs en in 1968 werd voor het eerst van Wiskobas gesproken, de afkorting voor <u>wisk</u>unde <u>o</u>p de <u>bas</u>isschool. In 1969 vond een gedenkwaardige vijfdaagse conferentie plaats in Egmond aan Zee met docenten van de Pedagogische Academies (PA; er waren er toen nog zo'n honderd) en gastsprekers uit het buitenland. Jammer genoeg was ik daar niet bij. Deze conferentie moet een nogal hectisch, maar ook zeer inspirerend karakter hebben gehad. Uit een onder de deelnemers gehouden enquête bleek dat eigenlijk niemand tevreden was met het toenmalige rekenonderwijs. Verder werd duidelijk dat men nogal grote verwachtingen van de New Math had, maar dat bijna de helft van de ondervraagden een wat voorzichtiger vernieuwingsaanpak in de traditie van het oude rekenonderwijs voorstond. En voor die koers is toen gekozen.

In 1968 pleitte Goffree in *Euclides* voor een 'vernieuwd wiskunde-onderwijs voor 5- tot 18-jarigen, dat mathematisch belangrijk is, maatschappelijk relevant en aanleiding zou kunnen geven tot didactische verlevendiging'. Door deze en andere publicaties werd mijn interesse verder gewekt, en toen het Wiskobasproject officieel bij het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) startte, solliciteerde ik naar één van de functies. Ik werd aangenomen en zo begonnen we met twaalf man op 1 augustus 1971 aan een taak, die in die vorm tot 1981 is uitgevoerd. Daarna is alle leerplanontwikkeling naar de SLO overgeheveld.

De uitdaging van de rekendidactiek

Het was een fantastische uitdaging om na vijftien jaar wiskundeleraar geweest te zijn mij nu te mogen gaan bezighouden met het rekenonderwijs.

Bij de start zou Freudenthal een welkomstwoord spreken. We zaten met alle nieuwe medewerkers op zijn kamer, waar hij met de historische woorden 'Goedenmorgen heren, laten we maar aan het werk gaan!' de toon zette voor de volgende tien jaar. Diezelfde dag begon ik met Leen Streefland een les over het spoorboekje te bedenken.

Al spoedig merkte ik dat de wereld van het rekenonderwijs een heel andere was dan die van de

wiskunde. De PA-leraren met wie ik in aanraking kwam, waren in het algemeen zelf onderwijzer geweest. Ze hadden meestal door studie van de oude middelbare aktes een gedegen wiskundige achtergrond. Ook hadden ze vaak nog pedagogiek gestudeerd. Ik leerde de lange en rijke traditie kennen van de Duitse en Nederlandse rekendidactiek. Tijdens de oorlogsjaren had ook Freudenthal zijn opvattingen over het rekenen al opgeschreven.
Alle collega's van het Wiskobasteam hadden een achtergrond van onderwijzer, wiskundeleraar aan de PA en/of pedagoog. Gedurende de cursus '71-'72 gaf ik een dag per week les aan een PA, waar ik met nieuw materiaal van Goffree werkte. Zo schoolde ik mezelf een beetje bij. Het meeste stak ik op van de interne Wiskobas-kadervormingen, die elke keer een feest waren vanwege de creatieve lesontwerpen die gelanceerd werden. Soms eindigden die bijeenkomsten in heftige discussies. Freudenthal deed altijd enthousiast mee, maar schuwde scherpe kritiek niet. Dat ging echter wederzijds. Zo had hij eens tijdens een lezing in het land luchtigjes opgemerkt dat de tafels van vermenigvuldiging niet zo belangrijk meer waren, omdat er toch een tijd van rekenmachines zou komen. Dit veroorzaakte intern en extern nogal wat deining. Wij gingen een stevige discussie met Freudenthal aan. Enkele weken later kwam hij met ideeën om juist met de tafels op een wiskundige en motiverende manier te gaan oefenen!
Daarnaast waren er iedere week algemene kadervormingen, verzorgd door een van de medewerkers of gasten. Het eerste jaar ging het over kansrekening en statistiek. Er werd enorm hard gewerkt. Altijd circuleerden wiskundige en onderwijskundige artikelen, observaties van ontwikkelingswerk, en vooral veel puzzels. Het vak, de wiskunde stond in alles centraal.

Grootse plannen

Wiskobas had zichzelf ambitieuze doelen gesteld: een leerplan voor de basisschool, een programma voor de PA en bijscholing van de onderwijzers. Met deze activiteiten werd direct in de onderwijspraktijk en in samenhang met elkaar gestart. Freudenthal sprak wel van ingenieurswerk. Overigens betekende dat niet, dat aan theoretische onderbouwing voorbijgegaan werd. Die theoretische beschouwingen waren echter steeds gebaseerd op het praktische werk in de school. Zo publiceerde Treffers in 1975 *De Kiekkast van Wiskobas*, waarin de uitgangspunten en doelstellingen van Wiskobas aan de hand van praktische voorbeelden uiteengezet werden. Het was een manifest, zou ik thans zeggen. In dit stuk wordt verantwoording afgelegd waarom Wiskobas niet wilde meegaan met de toenmalige mode van de New Math, waarin men verzamelingenleer en formele logica zelfs voor de kleinste kinderen aanbeval. (Het verhaal dat Freudenthal in zijn eentje het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs voor de Moderne Wiskunde zou hebben behoed is een mythe.) Er werd gekozen voor een meer realistische aanpak, waarin de wiskunde zich als 'menselijke activiteit' aandient. De leerstof werd onderscheiden naar zes domeinen: rekenen, meten, meetkunde, waarschijnlijkheid en statistiek, relaties en functies, en taal en logica. Verandering van de leerstof was weliswaar een doel, maar minder belangrijk dan het hier lijkt. We wilden vooral in de traditie van het oude rekenonderwijs voortwerken. In die doelbeschrijving hadden niet alleen kennis en vaardigheden hun plaats, maar ging het vooral ook om het bevorderen van een mathematische attitude, zowel bij leerling als bij leraar.

Voorstel van 1975 en daarna

Eind 1975 verscheen *Een overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool*. Dit model voor een schoolwerkplan was gebaseerd op experimenten die in de Willem Dreesschool te Arnhem waren uitgevoerd. De aard van het onderwijs was sterk projectmatig of thematisch. Zo werd aan de hand van een wandplaat van het eiland Waterland een project voor klas 1 (thans groep 3) beschreven, waarin rekenen en ruimtelijke oriëntatie de kernstof bepaalden. Taal/logica en relaties/functies kwamen impliciet in deze kernonderdelen aan de orde.
Ook het onderwijs voor de hogere leerjaren was volgens thema's beschreven. Zo was er bijvoorbeeld een project voor klas 6, waarin de kinderen kennismaakten met het kansbegrip, steekproef, simulatie, boomdiagram en zo meer. Dit project werd onder de titel *Kijk op Kans* ook via de school-TV uitgezonden. De traditionele onderdelen als het aanvankelijk rekenen en het cijferen werden niet uit het oog verloren. Ook voor de kleuters is toen allerhand materiaal ontworpen. De leerlingen van de Dreesschool deden mee aan de landelijke Cito-toets. De prestaties voor rekenen waren niet beter dan daarvoor, maar wel op de totale toets.
Na publicatie van dit plan vroeg het onderwijsveld om nadere uitwerking op onderdelen. Hieraan is tot 1981 doorgewerkt met publicaties over het aanvankelijk rekenen, het cijferen, gevarieerd oefenen, meten en meetkunde. Deze zogenoemde leerplandelen van Wiskobas hebben grote invloed gehad op de verschijning van nieuwe rekenwiskundemethoden in het begin van de jaren tachtig. Taal en logica, relaties en functies, waarschijnlijkheid en statistiek raakten als zelfstandige domeinen op de achtergrond. Enkele leerboeken uit die tijd besteedden nog wel enige aandacht aan ordenend tellen (combinatoriek), een onderwerp waarmee in het begin van de Wiskobastijd getracht werd het mathematiseren onder de aandacht te brengen. Persoonlijk vind ik het jammer dat dit onderwerp in het basisonderwijs volledig uit het zicht is verdwenen.
Na de Wiskobastijd is op het Freudenthal Instituut veel onderzoek gedaan over aanvankelijk rekenen, cijferen en basisvaardigheden. In 1989 werd deel 1 van de *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*

gepubliceerd. Hierin werd de basis gelegd voor het huidige 'realistische reken-wiskundeonderwijs', welke term door Treffers in 1979 is gelanceerd. Vanaf 2000 verschijnen de *TAL*-brochures, waarin leerlijnen en (tussen)doelen worden beschreven. Er wordt thans nog slechts van rekenen, meten en meetkunde gesproken, waarbij de aandelen van deze leerstofdomeinen op 80%, 10% en 10% gesteld worden.

Terugblik

Terugkijkend op al die jaren dat ik me met het rekenonderwijs heb beziggehouden, moet ik allereerst vaststellen dat veel van de inhoudelijke componenten van het door Wiskobas voorgestelde leerplan van 1975 te hoog gesteld waren. Ook de thematische aanpak die we toen voor ogen hadden was voor de praktijk van het gemiddelde onderwijs te hoog gegrepen. De leraar heeft behoefte aan methoden met goede handleidingen. En die zijn er gelukkig gekomen. De kern van het reken-wiskundeonderwijs is en blijft het rekensysteem, maar de zo belangrijke domeinen meten en meetkunde hebben zich toch een zekere plaats verworven. Een discutabel punt blijft het algoritmische rekenen. De aloude cijfermethoden stonden in de Wiskobastijd al ter discussie. Wij hebben altijd aan de cijfermethoden, zij het in een meer gedifferentieerde vorm, vastgehouden. Maar daarnaast is vanuit de Wiskobasgroep en vanuit de bredere kring, die daar later uit is voortgekomen, gepleit voor de ontwikkeling van flexibel getalinzicht met nadruk op hoofd- en schattend rekenen en inzichtelijk gebruik van de rekenmachine vanaf groep 7. Wat de inhoud van het leerplan betreft zijn de doelen van 1975 terecht bijgesteld. Met de huidige vormgeving van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, zoals neergelegd in de schoolboeken, ben ik bepaald niet ontevreden.
De plannen die we toen hadden met de PA, thans Pabo geheten, en met de bijscholing van de leraren basisonderwijs, leveren een heel ander verhaal. Het zijn politieke en beleidsmatige beslissingen geweest, die de toen door Wiskobas voorziene plannen in de weg hebben gestaan. Ten eerste is mijns inziens de fout gemaakt om de aloude Kleuter Opleidings Scholen (KLOS) op te heffen en te kiezen voor een opleiding tot basisschoolleraar die inzetbaar is op alle niveaus van 4 tot 12 jaar. Een tweede punt is dat men in de trend van het zogenaamde 'competentiegerichte opleiden' de leraar steeds meer als begeleider dan als docent beschouwt. Goffree en anderen hebben sinds 1970 uitstekende materialen voor de Pabo ontwikkeld, aan kadervorming van de docenten gedaan, maar er zijn te weinig contacturen voor deze moeilijke vakken. Voor taal, een ander kernvak, geldt hetzelfde. De studenten hebben vaak een veel te lage vooropleiding. Nu wordt wel gezegd dat de student bij zijn/haar afstuderen slechts startbekwaam is, maar wat betekent dat voor de praktijk? Is er verdere scholing en bijscholing? Ja, er bestaan voortreffelijke cursussen voor rekenen-wiskunde, zelfs opleidingen tot rekencoördinator. Maar die zijn niet verplicht, ze leveren geen materiële voordelen voor de school of cursist op, de school moet zelf beslissen of men daar aan meedoet. Het gevolg laat zich makkelijk raden. In het algemeen nemen de leraren geen deel aan deze bijscholing. Ze geven les volgens de handleiding van het boek en ontwikkelen zich niet tot de leraar die we in de Wiskobastijd voor ogen hadden: iemand met gedegen vakkennis, een breed didactisch repertoire en een mathematische attitude. Het realistische rekenen kan alleen maar naar de geest gestalte krijgen via de leraar voor de klas. Dat zou een reden moeten zijn voor politiek, overheid en schoolbesturen om voorwaarden te scheppen tot continue scholing. Dat kost geld, maar als we per jaar twee dagen minder met vakantie gaan kan dat makkelijk betaald worden, zo rekende cultuur-econoom Arjo Klamer onlangs in NRC-Handelsblad voor.
Desondanks probeer ik me te blijven inzetten voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Als ik iets geleerd heb tijdens die geweldige Wiskobastijd, dan is het wel hoe fascinerend rekenen op de basisschool kan zijn, dat het echte wiskunde is die je daar kunt doen, hoe belangrijk het is een goed fundament te leggen voor verdere studie en hoe motiverend dit vak kan zijn. Misschien is het door die opmerking van mijn vader in 1945 gekomen dat juist het 'gewone rekenen' mijn leven is gaan beheersen. Bedankt, vader!

Over de auteur

Ed W. A. de Moor (1933) was leraar, schoolleider, leerplanontwikkelaar, opleider en onderzoeker. Hij publiceert nog regelmatig over didactiek en historie van het reken-wiskundeonderwijs. Zijn e-mailadres is e.w.a.demoor@planet.nl.

GEPROGRAMMEERD REKENEN, OF MET SOCRATES IN HET STUDIEHUIS

Denkend aan Holland zie ik brede rivieren traag door oneindig laagland gaan ...

[Henk Pfaltzgraff]

Inleiding

Doel van deze bijdrage is inzicht te krijgen in traag voortgaande rijen als

$$p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots \quad \text{en} \quad H=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Een schat ligt begraven, ergens in een stuk grond van 10 m². Tien personen mogen elk 1 m² daarvan afgraven, tot de schat gevonden is. Jij bent een van die personen en je mag kiezen wanneer je aan de beurt wilt zijn, als eerste of als laatste of ergens daar tussenin. Bij welke beurt heb je de grootste kans op succes?

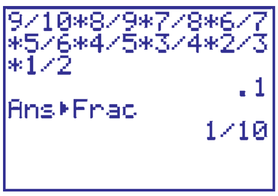
Je kunt, als leraar, het antwoord en de toelichting daarop geven via een antwoordenboek in een zelfontdekkende, zelfwerkzame studiehuisomgeving. Of je kunt, volgens het moderne *trial-and-error* leerprincipe met ICT laten uitproberen welk beeld er ontstaat na tienduizend of honderdduizend simulaties.

De Socratische methode

Zelf heb ik het vaak geprobeerd op de manier van Socrates (400 v. Chr.): via tussenvraagjes bij voorkeur aan leerlingen die niet goed op zitten te letten (tevens een ordemiddel dus). Deze interactieve benadering is geheel in onbruik geraakt en heeft in de diepste dip van de onderwijsvernieuwingen zelfs het predikaat frontaal, dus verwerpelijk, meegekregen.

Welke kans op succes respectievelijk pech heeft de eerste schatgraver? (Antwoord: $\frac{1}{10}$ resp. $\frac{9}{10}$)
Welke kans op succes heeft de tweede schatgraver, als hij uit 9 m² een plek moet kiezen? (Antwoord: $\frac{1}{9}$)
Wat is de kans op 'de eerste heeft pech ***en*** *de tweede heeft succes'?* (Let op het voegwoord 'en'.)
Moet je de kansen optellen of vermenigvuldigen?
Enzovoorts. Gaandeweg verschijnt het product:
$\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$
En nu komt het!
Wat is, vereenvoudigd, de uitkomst van dit product?
Blijf even van je rekenmachine af!

Ik wed dat er in de klas, 15-jarigen in het derde millennium, flink wat onrust zal ontstaan. Het wegdelen van alle gelijke factoren in teller en noemer is een wonder.
De voorlaatste schatgraver heeft een succeskans van $\frac{1}{10}$ en dat is tevens de kans dat de schat onder de laatste vierkante meter ligt. Met deze productrij, en dan met name het driftig wegstrepen daarin, kun je de blits maken bij de studiehuisgeneratie. Die is aan de hieronder getoonde, weerzinwekkende schrijfwijze gewend.



Laten we, achterstevoren lezend, het product

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

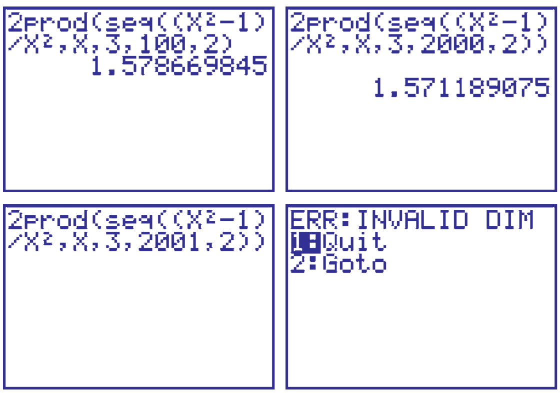
eens nader bekijken. Dit product is te beschouwen als het product van twee deelrijen

$$p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \quad\text{en}\quad p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

Op de grafische rekenmachines is er helaas een beperkte lijstlengte toegestaan.
Voor de TI-83 en -84 modellen is maar ruimte voor maximaal 999 termen (factoren).
Dat gaat dan met [2nd][LIST] en vervolgens `prod(seq(N/(N+1),N,1,999))` respectievelijk `prod(seq(N/(N+1),N,1,999,2))` en `prod(seq(N/(N+1),N,2,999,2))` met de uitkomsten 0,001, 0,0252250182 en 0,0396431825.
Deze drie rijen gaan vanzelfsprekend naar nul, maar minder vanzelfsprekend is de convergentie van de verhouding p_2/p_1:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde; daar moet wel weer een Socratisch kwartiertje voor uitgetrokken worden, denk ik.
Na hergroepering van de factoren,en voorbijgaand aan het merkwaardige product $(n+1)(n-1)=n^2-1$, kun je dit schrijven als $2\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}$ $(n = 3,5,7,\ldots)$.
De vraag is, of de rij p_2/p_1 een limiet heeft. Bekijk de volgende schermplaatjes. De GR rekent er rustig op los, dat is fijn.



Maar de eventuele convergentie is dermate traag, dat we na 999 factoren nog steeds niet overtuigd zijn.

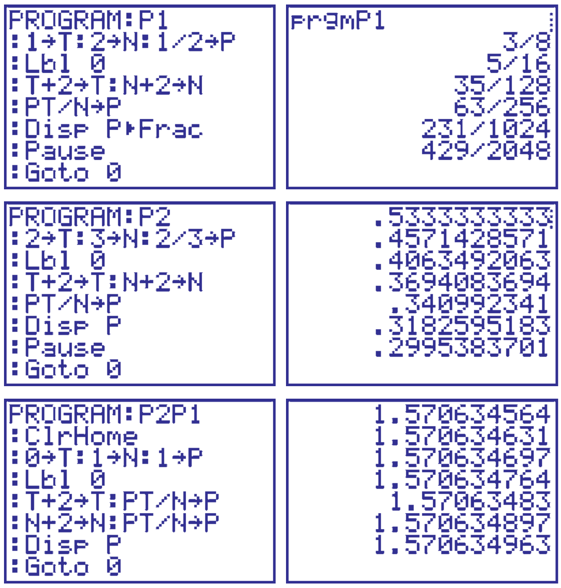
Programmeren helpt ons verder

De modellen van Texas Instruments werken met TIBASIC, een BASIC-dialect, aangepast bij de hardware van de calculator en buitengewoon gemakkelijk aan te leren. Kijk maar.

Na [PRGM]<NEW>1: kun je de programmanaam (hieronder: P1 en P2 en P2P1) invoeren en direct beginnen. We gebruiken de letters T en N voor teller en noemer, en P voor product. De toekenningsinstructie T+1→T (lees *oude waarde T plus 1 wordt nieuwe waarde T*) zorgt ervoor dat de teller met 1 toeneemt.
Disp is een afkorting van *Display* (druk af) en ▶Frac zet een decimaal getal om in een breuk (*Fraction*).
De commando's Disp, Pause, Goto en Lbl zijn tijdens het programmeren te bereiken via [PRGM].
(Niet tot het programma behorend commentaar staat tussen // en //; red.)
De essentiële lus is:

```
Lbl 0
   T+2→T: N+2→N: PT/N→P
   //T/N keer de oude waarde van P wordt
   de nieuwe waarde van P//
   Disp P
Goto 0
```

Een lopend programma kan met [ON] onderbroken worden.



Het plaatje van P2P1 (met 1,570668104...) ontstond na vijf minuten rekenen op de TI-83plus SE. Je kan goed aan de razendsnelle *scrolling* zien of (en wanneer) tenslotte ook de negende decimaal tot rust is gekomen. Drie keer raden waar dat naartoe gaat.



De *virtual TI-83* (op pagina 227 concreet afgebeeld) die, tien keer zo snel met de microprocessor van mijn modale PC werkt, liet ik vijf uur rekenen met voor p_2/p_1 als resultaat 1,570796189, wat pas in de zevende decimaal afwijkt van datgene wat we er erg graag uit zouden willen krijgen: $\frac{1}{2}\pi$. De teller en noemer hebben dan de 5688000 overschreden.

Terug naar de eerste rij: $p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots$

We hebben $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{n+1}$ en $\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{1}{2}\pi$

dus $p_1^{\,2}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}$ dus $p_1 \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi}}$.

Voor n = 1998 staat hier $p_1 \approx \sqrt{\frac{2}{1998\pi}} \approx 0{,}017850$,

hetgeen inderdaad een voortreffelijke voorspelling is van

```
p1 = prod(seq((2N-1)/(2N),N,1,999))=
0.017848
```

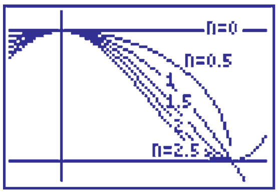
Het product van Wallis

Dit beroemde product zijn we tegengekomen bij p_2/p_1:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots=\frac{1}{2}\pi$$

Verrassend is het onverwachte optreden van π, maar nog verrassender is het feit dat iemand 340 jaar geleden (nog vóór Newton) niet alleen de uitkomst voorspelde, maar tevens een soort afleiding gaf, waarvoor hij zelf de nodige algebra moest ontwikkelen. Ik vond een beschrijving op de website van James Taylor (zie [2]).

Uitgangspunt is de verzameling grafieken $y=(1-x^2)^n$ met $-1\leq x\leq 1$ en $n\geq 0$.



In het geval n = 0,5 staat er een halve cirkel met oppervlakte $\frac{1}{2}\pi$. Wallis was in staat voor gehele waarden van n, via de door hem gevonden primitieve $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ van x^n en het binomium van Newton, de oppervlakte A_n onder deze grafieken te berekenen. Het formalisme daarvoor ontwikkelde hij zelf.

Hij vond achtereenvolgens:

$A_0 = 2$; $A_1 = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\cdot A_0$; $A_2 = \frac{16}{15} = \frac{4}{5}\cdot A_1$;

$A_3 = \frac{96}{105} = \frac{6}{7}\cdot A_2$

met de recursieve veronderstelling:

$A_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot A_{n-1}$ (n = 1,2,3,...)

Voor gebroken exponenten $(n=\frac{1}{2},1\frac{1}{2},2\frac{1}{2},3\frac{1}{2},\ldots)$ ging hij uit van dezelfde betrekking, dus:

$A_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\pi$; $A_{1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi$; $A_{2\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}\cdot A_{1\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi$; ...

Vergelijking van de oppervlakten levert:

$A_3 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 < A_{2\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi$ dus $\frac{1}{2}\pi \approx \frac{6}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}$;

enzovoorts.

De formule van Wallis!

De harmonische reeks

Speciale belangstelling verdient in dit kader de harmonische reeks:

$$H_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Deze reeks genoot de aandacht van het Zwitserse genie Leonhard Euler (1707-1783). Overbekend is het (ware) verhaal van de doofheid van Ludwig von Beethoven, de componist die door bleef componeren ondanks een complete doofheid op latere leeftijd. Veel minder bekend maar nog indrukwekkender is wat Euler overkwam. Na in 1735 het gezichtsvermogen van één oog verloren te hebben, werd hij in 1766 (vóór zijn zestigste dus) geheel blind, maar zijn geest werkte door. Met ongekende verbeeldingskracht en voorstellingsvermogen produceerde hij nog tal van mathematische publicaties van een buitengewone diepgang en helderheid. Opschrijven kon hij zijn gedachten niet meer, hij moest ze dicteren.

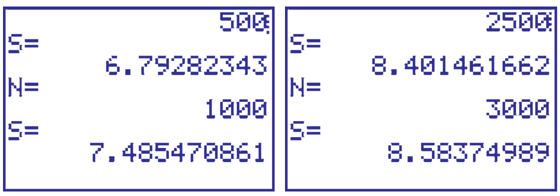
Volgen we Socrates.

Bereken met 'sum(seq(' *de som van de eerste* 100, 200, 300 *termen van* H_n. *Convergeert deze reeks naar een bepaalde limiet? Zo ja, welke?*

Voer het volgende programmaatje in en uit om voor steeds grotere waarden van N naar 'de' limiet te zoeken en spreek een vermoeden uit over de convergentie van de harmonische reeks.

```
0→S: 0→N
Lbl 0
   sum(seq(1/X,X,N+1,N+500))→T
   S+T→S: N+500→N
   Disp"N=",N
   Disp"S=",S
   Pause
Goto 0
```

En bereken $\sum_{k=1}^{3000}\frac{1}{k}$.



Een onbetwistbare conclusie is nog niet te trekken maar een vermoeden hebben we wel: *de harmonische reeks lijkt te divergeren*. Deze divergentie is echter van een onvoorstelbare traagheid! Na een miljoen termen is de som pas gevorderd tot iets voorbij de 14; in 1968 berekende J. Wrench het aantal benodigde termen om boven de 100 te komen, dat aantal was:

15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497

Wie denkt dat dit getal simpel door een computer is uit te rekenen, vergist zich. Stel je een supercomputer

voor die elke seconde een miljard optellingen verricht en stel je voor dat die supercomputer daar dag en nacht mee doorgaat, onvermoeid. Deze zou er ruim 10^{26} jaar voor nodig hebben, onvergelijkelijk veel langer bijvoorbeeld dan het heelal bestaat (13×10^9 jaar). Aldus *Julian Havil* in het prachtige boek *Gamma - Exploring Euler's Constant* (zie [1]).

In de 14e eeuw(!) gaf de Franse bisschop Nicholas Oresme een bewijs voor de divergentie van de harmonische reeks. Hij groepeerde de termen van de reeks en gebruikte de eigenschap van een breuk dat vergroting van de noemer leidt tot verkleining van de breuk: zo is $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ want 7 is kleiner dan 8. In moderne notatie is het bewijs van de divergentie simpel:

$$\begin{aligned}H_\infty &= 1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\ldots+\tfrac{1}{16})+\ldots\\ &> 1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{16})+\ldots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{4}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{8}{16}+\ldots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots\end{aligned}$$

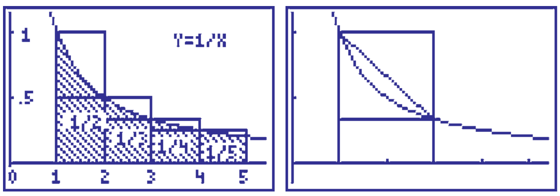
en dit laatste divergeert.
Vier eeuwen later kwam Euler hierop terug en weer drie eeuwen later komen wij op Euler terug.

Gamma

Euler heeft gezocht naar het verband tussen de harmonische reeks en een integraal. De oppervlakte onder de grafiek van $f(x)=\frac{1}{x}$, rechts van de lijn $x = 1$, kan namelijk bij benadering geschreven worden als een som van rechthoekjes met breedte 1 en hoogte $\frac{1}{x}$:

$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x}\cdot 1$, en dat lijkt wel heel erg op $\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

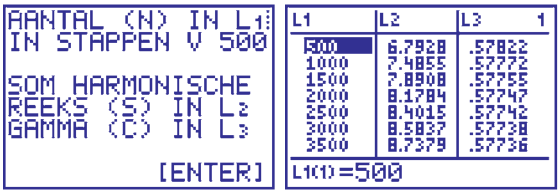
waarvan de uitkomst $\ln(n)$ is. En tegelijkertijd is de totale oppervlakte van die rechthoekjes juist de som van de harmonische reeks!
Laten we eerst zelf eens wat proberen.



De oppervlakte onder de grafiek van $\frac{1}{x}$, tussen de lijnen $x = 1$ en $x = n$, kan door rechthoekjes benaderd worden.
De hoogste rechthoekjes leveren, als we $\ln(n)$ proberen te benaderen, duidelijk teveel op.
Die bovensom is $B_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}$.
De onderste rechthoekjes hebben een oppervlakte die te weinig oplevert, namelijk:
$O_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$.
Het gemiddelde van de bovensom en de ondersom $\frac{1}{2}(B_n+O_n)$ is een veel betere benadering. Niet te groot en niet te klein maar precies er tussenin, zoals in het verhaal van Goudhaartje en de drie beren. Zo vinden we:

$$\begin{aligned}\ln(n) &= \tfrac{1}{2}\Big((1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n-1})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n-1}+\tfrac{1}{n})\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big((1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n-1}+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n})+(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots\\ &\quad +\tfrac{1}{n-1}+\tfrac{1}{n}-1)\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big((H_n-\tfrac{1}{n})+(H_n-1)\Big)\\ &= H_n-\tfrac{1}{2n}-\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

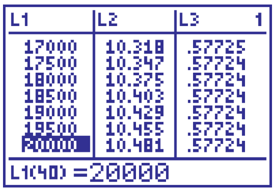
Eigenlijk nog ietsje minder, omdat de kromme $\frac{1}{x}$ iets onder de schuine lijnstukjes (de 'koorden') ligt.
Noem 'iets' even ε. De som van de harmonische reeks is dan te schrijven als
$H_n=\ln(n)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\varepsilon$
Als n naar oneindig gaat, komt er voor 'de' som:
$H_\infty=\ln(n)+\gamma$
De Griekse letter γ staat voor gamma, de constante van Euler. Gamma is dus iets groter dan 0,5.
Euler slaagde erin een benadering (0,577218) voor γ te vinden die pas in de zesde decimaal afweek van wat we er tegenwoordig van weten: de constante van Euler is ongeveer 0,5772156.



Breid het vorige programma zodanig uit, dat in L1 *de n-waarden komen* (500, 1000, 1500, ...), *in* L2 *de som* H_n *en in* L3 *de schatting van* $\gamma=H_n-\ln(n)$.
Noem het programma GAMMA en sla het op, om er later nog eens bij stil te kunnen staan hoe moeilijk het is om Eulers prestatie te evenaren, zelfs als je een computer laat rekenen.

```
ClrHome
Disp "AANTAL (N) IN L1"
Disp "IN STAPPEN V 500"
Disp ""
Disp "SOM HARMONISCHE"
Disp "REEKS (S) IN L2"
Disp "GAMMA (C) IN L3"
Output(8,10,"[ENTER]")
Pause: ClrHome: ClrAllLists
0→S: 0→N: 0→I
Lbl 0
   Output(8,10,"     ")
   sum(seq(1/X,X,N+1,N+500))→T
   S+T→S
   N+500→N: I+1→I
   S-ln(N)→C
   Output(1,1,"N=")
   Output(1,3,N)
   Output(2,1,"S=")
   Output(2,3,S)
   Output(3,1,"C=")
   Output(3,3,C)
```

```
   Output(8,10,"[ENTER]")
   N→L1(I): S→L2(I): C→L3(I)
   Pause
Goto 0
```





N.B.
Zoals gezegd, de constante van Euler is 0,5772156... en Euler kwam tot 0,577218.
Mijn *Virtual TI-83* kwam na 200 000 termen uit op 0,5772181649.

Naschrift

Nodig (maar niet voldoende) voor de convergentie van een productrij $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ is dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
De rij $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$ convergeert voor alle $p > 1$;
zo gaat $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\ldots$
naar de wonderbaarlijke limiet $\frac{\sinh\pi}{\pi}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$.
Het product van Wallis heeft factoren die, afwisselend kleiner en groter dan 1, naar 1 gaan
$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\ldots$
Dergelijke productrijen convergeren ook.

Een minuscule verandering leidt tot een geheel andere uitkomst; de rij

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$$

gaat naar $\frac{1}{2}$; op de eerste breuk na vallen op den duur immers alle tellers en noemers tegen elkaar weg.
Waarom is

$$\prod_{n=3}^{\infty}(1-\frac{2}{n})(1+\frac{2}{n})=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\ldots=\frac{1}{6}$$

- Streep de tellers 5, 6, 7, ... weg tegen gelijke noemers, drie breuken verderop.
- Streep de resterende noemers 3, 4, 5, ... weg tegen resterende tellers, drie breuken daarvoor.
- Over blijft $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$, en dat is de limiet.

Lastiger is zo'n vraag te beantwoorden bij productrijen waarin de tellers en noemers opvolgende gehele getallen zijn en de breuken afwisselend kleiner en groter dan 1 zijn, zoals de volgende:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{16}{15}\cdot\ldots$$

die de limiet 0,5990701058 lijkt te hebben (na 50 miljoen bewerkingen). In zulke rijen valt er weinig te schrappen.

```
4→N: 0.5→P
Lbl 0
   PN(N+1)/((N-1)(N+2))→P
   Disp P
   N+4→N
Goto 0
```



Is er een exacte uitdrukking (met π misschien) voor dit decimale getal te vinden? Wellicht is er een lezer met een groter denkraam (of grotere bibliotheek) die mij aan het antwoord op deze vraag kan helpen.

Verwijzingen

[1] Julian Havil: Gamma - Exploring Euler's Constant. Princeton (NY): Pricenton University Press (2003).
[2] Website van James Taylor: www.dovepresent.com.

Over de auteur

Henk Pfaltzgraff (e-mailadres: henk@henkshoekje.com; zie ook www.henkshoekje.com) was 37 jaar leraar wiskunde en 20 jaar conrector bovenbouw havo/vwo aan het Zaanlands Lyceum.

REKENEN MET BREUKEN, LEREN MET OF ZONDER TRUCJES?

Ervaringen en opvattingen van een scholiere

[Ingrid Homans en Klaske Blom]

Inleiding

Hoe ervaren leerlingen ons onderwijs? Hebben de doordachte didactieken ook de beoogde effecten? De ervaringen van Ingrid Homans, oud-leerlinge van ‘t Hooghe Landt in Amersfoort en inmiddels studente aan de pabo, staan centraal in dit artikel en geven ons als docenten stof tot nadenken.

Ingrid is tijdens haar schoolloopbaan aan het eind van 5-vwo overgestapt naar 5-havo in het profiel CM met wiskunde-A1. Vanwege deze overstap heeft ze een Praktische Opdracht gemaakt met een op haar interesse toegesneden onderwerp: het leren rekenen met breuken op de basisschool. Ze heeft een aantal methodes bekeken, zich verdiept in de hedendaagse breukenpraktijk op de basisschool en zich op grond van haar onderzoekje en haar eigen schoolervaringen een mening gevormd over de didactiek van het breukenonderwijs.

Zelf was Ingrid gedurende haar hele schoolcarrière een zwakke maar hardwerkende leerling. Ze heeft zich tijdens het maken van de Praktische Opdracht vooral ook afgevraagd, hoe zij zelf als leerling in het realistisch rekenonderwijs zou gedijen. Uiteraard heeft zij geen volledig beeld van het huidige realistische rekenonderwijs, maar ze schat in dat ze zich te veel aan haar lot overgelaten zou voelen en de steun van sturende opdrachten zou missen als ze op deze manier les had gehad op de basisschool. Klaske Blom (haar wiskundedocente op ‘t Hooghe Landt) ging met haar in gesprek en vroeg haar naar haar ervaringen met en opvattingen over rekenonderwijs. Hieronder vindt u een verslag van dit interview, afgewisseld met intermezzo’s ter reflectie.

Interview

Ingrid, wat weet je nog van je eigen ervaringen met rekenen op de basisschool?

Uit mijn eigen basisschooltijd weet ik niet meer zo goed met welke methode wij werkten; het was een sobere methode, veel rijtjes, weinig plaatjes, het had de vorm van een gekanteld A4-tje, en achterin zat een groen gedeelte speciaal voor het cijferen. Ik verzon zelf verhaaltjes als het te saai werd: bij het staartdelen kwam een aardig monster opduiken dat hoog in de lucht hing, bijvoorbeeld bij 59, en dat langzaam naar beneden kwam zakken in sprongetjes van zeven als ik door zeven moest delen. Op de grond stonden mensen hem aan te moedigen, dat hielp. Ik kan me niet herinneren dat ik verhaaltjes had voor het rekenen met breuken; het was ook niet zo nodig, want het was niet zo saai als delen, bovendien kon ik er ook slecht iets bij verzinnen omdat ik niet wist waarover het ging. En het allerbelangrijkste was eigenlijk dat het met het trucje [Ingrid bedoelt mijns inziens: algoritme; KB] veel sneller ging dan met een verhaaltje, dus het was niet nodig.

Het leren rekenen met breuken vind ik één van de moeilijkste onderdelen in het rekenonderwijs. Dat dingen uit delen bestaan, is niet zo moeilijk te begrijpen, maar om vervolgens met die breuken te gaan vermenigvuldigen en delen wordt al moeilijker. Nog moeilijker is om dit alles te onthouden, want op de middelbare school doe je eigenlijk nauwelijks meer iets met de breuken; je typt een breuk namelijk gewoon in op je rekenmachine en doet zelden iets uit je hoofd. Procenten worden veel belangrijker. Wat dat betreft ben ik het hoofdrekenen ook helemaal verleerd. Op de basisschool maakten we rijtjes hoofdrekensommen, terwijl ik nu al diep moet nadenken over de meest eenvoudige optel- en aftreksommetjes. Eigenlijk wel zonde. Tijdens de zomervakantie bijvoorbeeld werkte ik achter de kassa bij een supermarkt en ik merkte dat het werken met geldbedragen me veel moeite kostte. Het deed me denken aan de toetsenstress op school: als ik beter in hoofdrekenen was geweest, had ik niet zo veel tijd hoeven verliezen met werken op mijn rekenmachine.

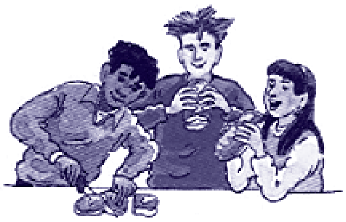
Rekenen met breuken



a Bedenk bij iedere breuk vier gelijkwaardige breuken.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$



b Bedenk met deze breuken ook vier optel- en vier aftreksommen. Schrijf ze in je schrift en reken ze uit.

Wat vond je opvallend in de methodiek van het breukenonderwijs?

Ik heb voornamelijk de methode *Het Gouds breukenpakket*, (1985, H. Kort e.a., uitgever: Dijkstra Zeist) onderzocht en uiteindelijk op grond hiervan een conclusie getrokken. Ik zal een kort verslag geven van mijn onderzoek.

Dit pakket is bedoeld voor leerlingen die moeite hebben met breuken maar kan ook worden gebruikt in plaats van de rekenmethode die op school wordt gehanteerd. Het pakket bestaat uit zes delen: Breukbegrip, Gelijkwaardige breuken, Optellen en aftellen gelijknamige breuken, Optellen en aftrekken ongelijknamige breuken, Vermenigvuldigen met breuken en Delen met breuken. Het pakket bestaat uit allemaal werkbladen en het is, zoals in de handleiding staat, een stap in de richting van vernieuwend reken- en wiskundeonderwijs. Leerlingen leren geen trucjes en regels meer, maar het accent wordt gelegd op het handelend bezig zijn en het verwoorden en het zien van wat je doet: een 'realistische rekenmethode'. Er wordt veel gebruik gemaakt van concrete situaties, zodat de leerlingen zien op welke manieren ze in hun leven normaal gesproken al in aanraking komen met breuken.

Wat mij persoonlijk erg opviel was dat de kinderen ook zelf de kans krijgen uit te vinden hoe ze iets moeten doen en dat de methodes die ze gebruiken meer tijd kosten dan de gewone 'trucjes'. Een voorbeeld: $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$. Volgens het Gouds breukenpakket zou je nu achter elke breuk een rij gelijkwaardige breuken kunnen zetten om er zo achter te komen wat een gelijke noemer zou zijn. Dat kan veel makkelijker. Je kijkt gewoon welk getal in de tafel van 5 ook voorkomt in de tafel van 8. In ieder geval 40, want $5 \times 8 = 40$. Daarna kijk je of er ook een kleiner getal is waarin de tafels overeenkomen. Zo niet, dan doe je de teller keer het getal waarmee je de noemer vermenigvuldigt, dus 2×8 en 3×5. Dan wordt de optelsom $\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{31}{40}$. Dit is de manier waarop ik dat op de basisschool geleerd heb, maar leerlingen die een realistische rekenmethode krijgen, leren deze manier niet.

Reflectie-intermezzo

Hoewel deze laatste inschatting van Ingrid niet helemaal correct is, is de conclusie die ze trekt na het vergelijken van deze aanpak met haar eigen ervaringen, verrassend: 'Leerlingen hebben er meer baat bij als de leerkracht vertelt wat de handigste aanpak is, dan wanneer ze het zelf moeten uitzoeken.' Kennelijk ervaart Ingrid het realistisch wiskundeonderwijs als een onderwijsvorm waarbij leerlingen aan hun lot worden overgelaten. Hier is enige nuancering op zijn plaats: weliswaar is het binnen het realistisch wiskundeonderwijs de bedoeling om de eigen aanpakken van leerlingen als startpunt te nemen, maar vervolgens zouden die met de strategieën van medeleerlingen en eventueel die van de docent vergeleken moeten worden, waarna de leerling vervolgens een bij haar/hem passende aanpak 'kiest'.

Toen we doorpraatten over Ingrids ervaringen bleek ze vooral bezwaar te hebben tegen deze didactiek omdat het zwakke leerlingen zoveel tijd kost. Ze schetste de volgende situatie.

Het was vroeger heel fijn als je snel kon werken, want de leerlingen die hun werk al op tijd af hadden mochten iets leuks gaan doen zoals 'op de computer', 'een poppenkastvoorstelling maken', 'bijzondere rekenopdrachten maken', etc. Ik was niet snel, wilde altijd alles heel goed doen, en had nooit de kans om iets leuks te doen. Als je leerlingen hun eigen aanpak laat zoeken vergroot je de verschillen die er toch al zijn tussen leerlingen. In het Montessori-onderwijs is

dat geen probleem want daar is alles er op ingericht om met verschillen om te gaan, maar in het reguliere onderwijs zijn de trage leerlingen dus altijd de pineut. Als ik de goede trucjes ken, kan ik ook snel en nauwkeurig werken. Dan snap ik niet altijd wat ik doe, maar ik doe het wel goed en houd daardoor tijd over voor iets leuks.

Heb jij als basisschoollerares in spe al een mening over de huidige rekendidactiek?
Er is veel veranderd in het breukenonderwijs. Het lijkt alsof in de realistische rekenmethode het gebruik van regeltjes en trucjes is afgeschaft. Daar moet ik persoonlijk nog erg aan wennen. Het goede ervan lijkt me, dat leerlingen meer inzicht krijgen. Toch ben ik ook bang dat door deze methode kinderen nog sneller zullen vergeten hoe ze breuken, maar ook procenten moeten aanpakken. Want trucjes zijn makkelijker op te halen dan iets wat je zelf moet bedenken.

Reflectie-intermezzo

Ingrids idee over het ontbreken van regels en trucs in het realistisch rekenonderwijs is niet correct: de docent begint weliswaar niet direct met regels, maar via progressieve schematisering kunnen leerlingen best op het niveau van algoritmen terecht komen. Als de algoritmen ontwikkeld zijn vanuit contexten, zijn ze volgens de meeste leertheorieën vervolgens gemakkelijker te onthouden en bovendien toepasbaar in verschillende gebieden. Contexten worden zo ingezet als kapstok om een nieuw concept of nieuwe vaardigheid aan op te hangen. Ingrids overtuiging is overduidelijk anders. Hoewel ze daar toch ook nog iets anders over opmerkt:

'Doordat ik veel trucjes heb geleerd kon ik de meeste opgaven goed maken zonder ze te snappen; het nadeel was echter dat ik mijn kennis en trucjes zelden kon toepassen in nieuwe situaties. De docent zei dan dat ik slechts hoefde te variëren op een bekend thema, maar voor mij leek alles weer nieuw. Ik heb de indruk dat er juist bij wiskunde zo ontzettend veel verschillende onderwerpen zijn, en dat je meer inzicht moet hebben om het overzicht te houden.'

Dat lijkt toch tegenstrijdig met elkaar?
Ja, ik merk dat ik, ondanks de vele geleerde trucjes, heel veel weer vergeten ben. Helaas bleek dat tijdens de rekentest die ik op de Pabo moest doen vorige week. Dus ik spreek mezelf inderdaad wel tegen als ik zeg dat je trucjes niet vergeet. Toch heb ik het gevoel dat ik een trucje makkelijker weer op kan halen dan een aanpak die ik zelf ontdekt heb. Het is moeilijk uit te leggen. Ik denk dat het komt doordat ik niet iemand ben met veel wiskundig inzicht. Voor mij lijkt wiskunde soms een grote warrige brei, die ik heel moeilijk uit de war kan halen. Als ik op de basisschool zelf regels had moeten bedenken, denk ik dat ik daar veel moeite mee had gehad. Ik had er namelijk lang over gedaan en het op zeker moment opgegeven. Ik vind wiskunde pas leuk als ik het snap. Voor mij is een trucje of regel een soort handvat waardoor bepaalde stof langzaam maar zeker wat duidelijker wordt en ik het begin te snappen. Als ik later zo'n trucje weer terugzie, kan ik aan de hand daarvan mijn kennis weer ophalen.

Tenslotte

Ingrid heeft ons openhartig een kijkje gegund in haar denken over reken- en wiskundedidactiek en daar dank ik haar hartelijk voor. Het was in sommige opzichten ook confronterend: van veel leerlingen weet ik dat ze alleen maar sommen maken om het goede antwoord te vinden (dat van het antwoordenboekje) om vervolgens zo snel mogelijk klaar te zijn. Eerlijk gezegd schrijf ik dit nogal eens toe aan 'ongeïnteresseerdheid' en 'luiheid': liever doen om het af te hebben, dan doen om te leren. Door Ingrids verhaal realiseer ik me opnieuw, hoe frustrerend het voor sommige leerlingen moet zijn dat het nóóit snel gaat. Dat zo'n leerling wel zou willen leren van wat hij/zij doet, maar dat het niet lukt binnen de beschikbare tijd. Het zet de opmerking 'Zeg me nou maar hoe het moet' in een ander daglicht. En dat is, als bezinning op mijn werk, toch weer mooi meegenomen.

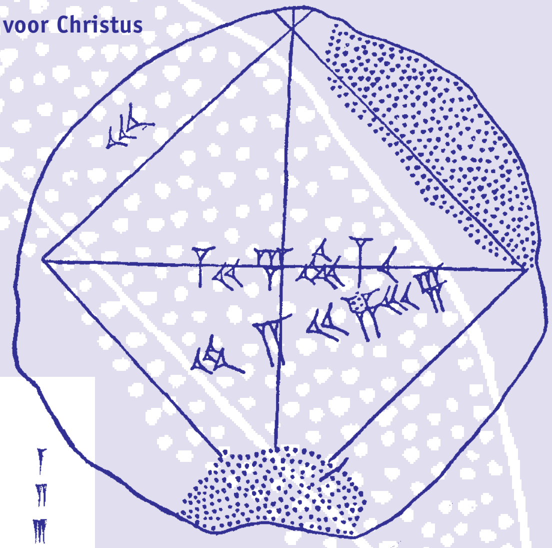
Over de auteurs

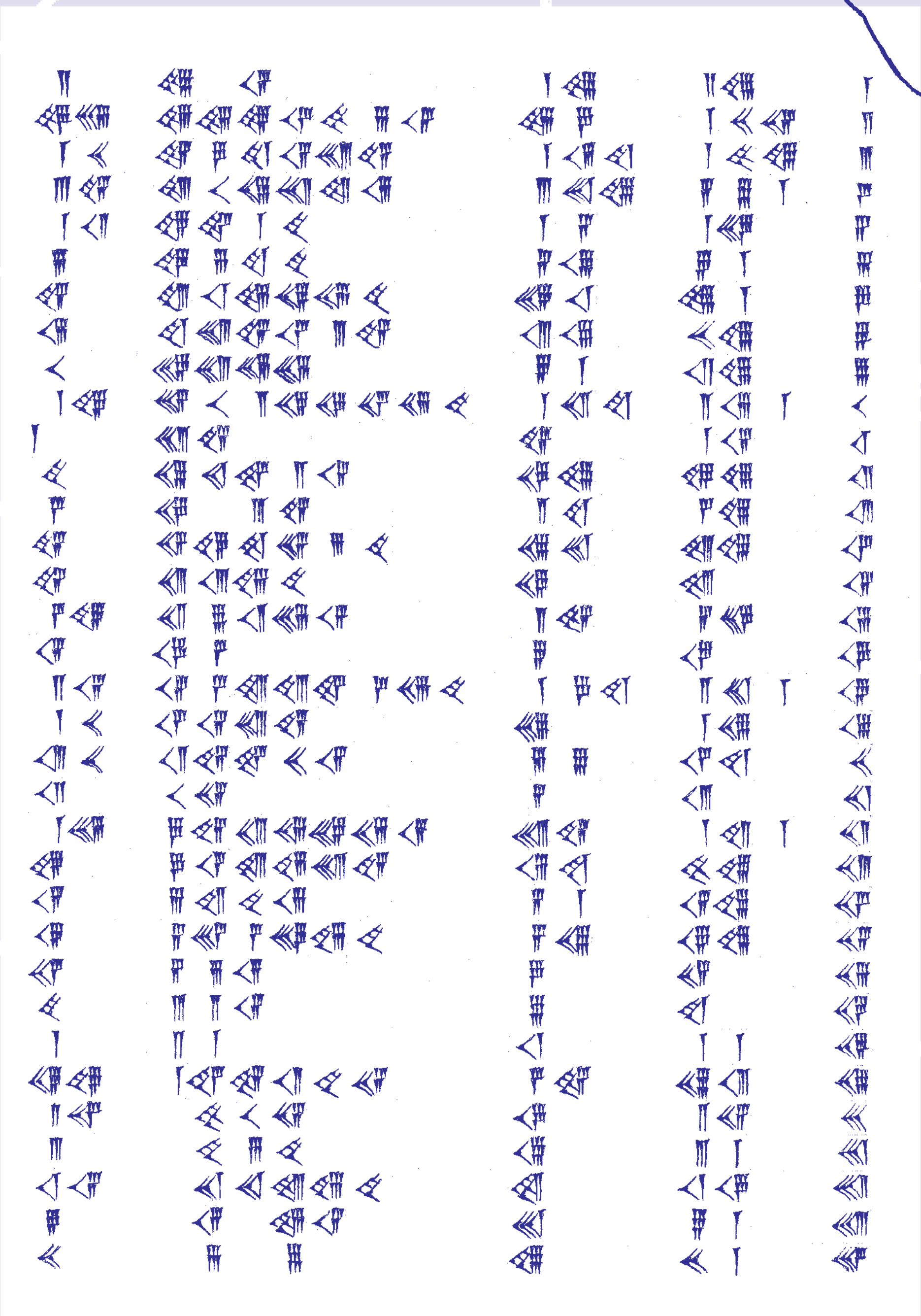
Ingrid Homans is eerstejaars studente aan de pabo (Marnix Academie te Utrecht). Ze deed eindexamen havo in 2004 aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt, in Amersfoort.
Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) is docente wiskunde aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt, in Amersfoort. Zij is tevens redactielid van Euclides.

BABYLONISCH REKENEN

[Jan van de Craats]

FIGUUR 1 Een Babylonische kleitablet uit circa 1700 voor Christus





FIGUUR 2 De reconstructie door Conway en Guy van Plimpton 322

Inleiding

De oude Babyloniërs die een kleine vierduizend jaar geleden Mesopotamië (het huidige Irak) bewoonden, moeten keien in de wiskunde zijn geweest. Ze kenden de stelling van Pythagoras, beschikten over indrukwekkende algebraïsche vaardigheden en hadden een zeer efficiënt notatiesysteem voor getallen. We weten dat omdat er uit die tijd duizenden kleitabletten bewaard zijn gebleven met inscripties in spijkerschrift. Sommige van die tabletten laten verbazingwekkende staaltjes wiskunde zien.
Een voorbeeld is de tablet uit ongeveer 1700 voor Christus, die in figuur 1 is afgebeeld. De afmetingen ervan zijn circa zes bij zes centimeter. Er staat een vierkant op met zijn twee diagonalen en een aantal tekens in spijkerschrift. Dat blijken getallen te zijn in het 60-tallig stelsel dat destijds bij de Babyloniërs in gebruik was.
De drie tekens linksboven bij de schuine zijde van het vierkant vormen samen het getal 30. De tekens op de horizontale diagonaal stellen een zestigtallige breuk voor. In onze decimale schrijfwijze komt die breuk na afronden overeen met het getal 1,41421296. Dat lijkt erg op $\sqrt{2}$; niet verwonderlijk voor wie de stelling van Pythagoras kent. De decimale ontwikkeling van $\sqrt{2}$ begint met 1,41421356... Het verschil met de Babylonische waarde is kleiner dan een miljoenste! Onder de diagonaal staat, een beetje scheef, nog een getal. In onze notatie omgezet en afgerond is dat het getal 42,426389, precies het product van de zijdelengte 30 en de Babylonische $\sqrt{2}$. Dat getal scheelt ongeveer één honderdduizendste met de exacte waarde.
De getallen op de kleitablet geven dus de lengte van de diagonaal, de lengte van de zijde en hun onderlinge verhouding aan. En wel met een nauwkeurigheid die veel en veel groter is dan de Babyloniërs ooit door opmeten in een 'echt' vierkant hadden kunnen vinden. Dat de wiskunde van de Babyloniërs het stadium van uitsluitend praktisch gericht meten en rekenen ontstegen was, zal uit het bovenstaande duidelijk zijn. Wat bovendien uit deze tablet en allerlei andere opgegraven tabletten blijkt, is dat de stelling van Pythagoras minstens 1200 jaar ouder moet zijn dan de naam suggereert: Pythagoras leefde immers omstreeks 500 voor Christus, eerst op Samos en later op Sicilië.

Het Babylonische getallenstelsel

De oude Babyloniërs gebruikten maar twee symbolen om getallen te noteren: een 'spijker' en een 'winkelhaak'. Die symbolen werden in de natte klei gedrukt met behulp van een scherf. De spijker stelde 1 voor en de winkelhaak 10. Maar het Babylonische stelsel is zestigtallig (sexagesimaal); met spijkers en winkelhaken werden alleen maar de getallen van 1 tot en met 59 weergegeven, eerst de winkelhaken (maximaal vijf) en dan de spijkers (maximaal negen). Voor de overzichtelijkheid werden de spijkers en de winkelhaken in groepjes van 3 bij elkaar gezet (zie figuur 3).
Het getal 60 werd weer met één spijker aangegeven. Die ene spijker kan dus 1 betekenen, maar ook 60, of 3600 (= 60^2), of 216000 (= 60^3), enzovoort. Of ook $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ enzovoort, afhankelijk van de positie. Want net zoals wij met tiendelige breuken werken, werkten de Babyloniërs met zestigtallige breuken. Hun systeem kende maar twee lacunes: ze kenden geen symbool voor 0 en ze gebruikten geen komma of iets dergelijks om het gehele deel van een getal te scheiden van het sexagesimale breukgedeelte. In de praktijk gaf dat zelden problemen omdat uit de context meestal wel duidelijk was wat er bedoeld werd, maar je moet er wel op verdacht zijn.

Als we gewapend met deze kennis weer naar figuur 1 kijken, zien we langs de schuine zijde links inderdaad het getal 30 staan (drie winkelhaken). Op de diagonaal van het vierkant staan de 'sexagesimalen' (1)(24)(51)(10). Uit de context moeten we dan opmaken dat de komma na de 1 gezet moet worden, en dat het dus gaat om (in onze notatie)

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}\approx 1{,}41421296$$

De lengte van de diagonaal staat er schuin onder. In sexagesimale symbolen uitgedrukt staat er (42)(25)(35). We moeten weer zelf de komma zetten:

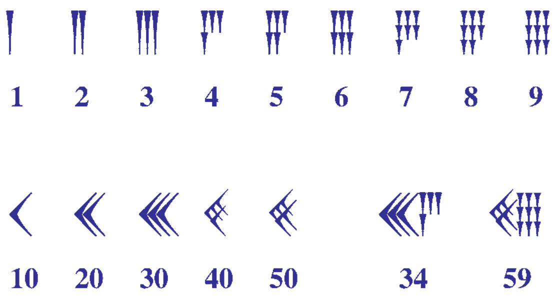
$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{3600}\approx 42{,}426389$$

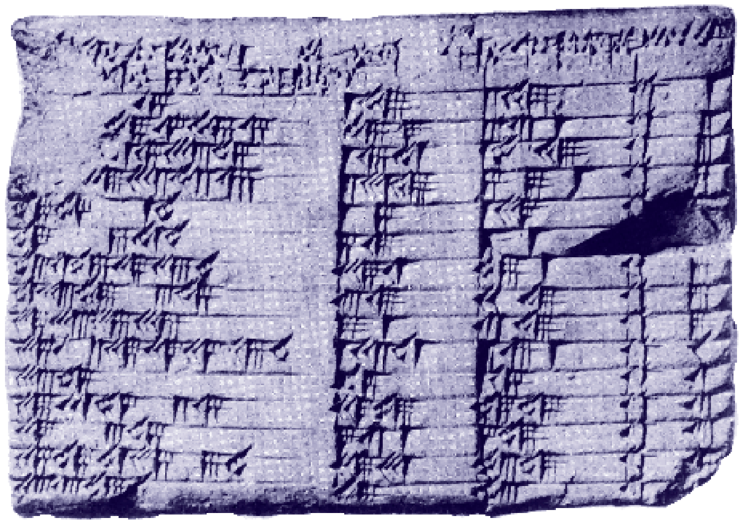
Denk nu niet dat dit zestigtallige stelsel alleen maar een curiositeit is: in feite gebruiken we het nog steeds bij onze tijdmeting (in uren, minuten, seconden) en onze hoekmeting (in graden, minuten, seconden). Het Babylonische stelsel was voor astronomische berekeningen zó handig dat het voor dat doel in veel andere culturen is overgenomen.

De kleitablet Plimpton 322

Een indrukwekkend staaltje Babylonisch rekenwerk laat de kleitablet zien die het nummer 322 draagt in de Plimpton collectie van de University of Columbia (USA); zie figuur 4. Hij stamt uit de periode tussen 1800 en 1650 v. Chr. Aan de linkerkant en de onderkant zijn er stukken afgebroken, en linksboven en rechtsmidden zijn flinke beschadigingen zichtbaar, maar toch slaagden Neugebauer en Sachs[1] er in 1945 in om een aantal raadsels ervan te ontsluieren. Het blijkt te gaan om *pythagoreïsche drietallen*, drietallen gehele getallen die de lengte, de breedte en de diagonaal vormen van een rechthoek, zoals bijvoorbeeld het bekende drietal 4, 3 en 5.

De rechterkolom bevat de rijnummers en in de kolom links daarvan staan geen getallen, maar telkens hetzelfde tekstje, dat zoiets als 'rijnummer' betekent. Interessanter zijn de eerste drie kolommen. Eerst de tweede en de derde kolom. Noemen we die getallen respectievelijk b en c, dan blijkt dat $c^2 - b^2$ steeds het kwadraat van een geheel getal a is. De getallen a, b en c vormen dus inderdaad een pythagoreïsch drietal, een drietal gehele getallen waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$.





FIGUUR 3 Getallen in spijkerschrift

FIGUUR 4 De kleitablet Plimpton 322 (circa 1700 voor Christus)

Die getallen a zijn overigens niet op de kleitablet te vinden, maar ze hebben wel twee merkwaardige eigenschappen: elke a is groter dan de bijbehorende b, en elke a heeft alleen maar de priemfactoren 2, 3 en 5 in zijn priemontbinding. Dat zijn, niet toevallig zoals we zullen zien, precies de priemfactoren van 60, de basis van het Babylonische talstelsel.
Nu de getallen van de eerste kolom. Die krijgen betekenis als je ze opvat als sexagesimale breuken. Dan zijn ze namelijk steeds gelijk aan de sexagesimale breukontwikkeling van b^2/a^2. Juist omdat a alleen maar de priemfactoren 2, 3 en 5 bevat, breekt zo'n ontwikkeling na een eindig aantal stappen af, precies zoals in ons decimale stelsel een decimale ontwikkeling van een breuk alleen maar afbreekt als 2 en 5 (de priemfactoren van 10) de enige priemfactoren van de noemer zijn.

De reconstructie van Conway en Guy

In *The Book of Numbers*[2] geven John H. Conway en Richard K. Guy de als figuur 2 op pagina 234 afgebeelde reconstructie van de tabel zoals die er misschien oorspronkelijk heeft uitgezien. Zij hebben aan de linkerkant een kolom toegevoegd voor de getallen a, het aantal rijen tot 34 uitgebreid en enige kleine, voor de hand liggende correcties uitgevoerd.
Op de tiende rij vinden we
$a = (1)(48) = 3600 + 48 \times 60 = 6480$,
$b = (1)(22)(41) = 3600 + 22 \times 60 + 41 = 4961$ en
$c = (2)(16)(1) = 2 \times 3600 + 16 \times 60 + 1 = 8161$.
Inderdaad is $6480^2 + 4961^2 = 8161^2$. Op de tweede plaats in diezelfde rij staat de sexagesimale breuk 0,(35)(10)(2)(28)(27)(24)(26)(40) - hierbij heb ik zelf de 0 en de komma toegevoegd. Dit kun je schrijven als de breuk 24611521/41990400 en dat is inderdaad het getal $4961^2/6480^2$.
Gemakkelijker te ontcijferen, maar misschien minder indrukwekkend, is de 28e rij, met $a = 60$, $b = 11$, $c = 61$ en in de tweede kolom de sexagesimale breuk $0,(2)(1) = 2/60 + 1/3600 = 121/3600 = b^2/a^2$
Inderdaad is $60^2 + 11^2 = 61^2$.

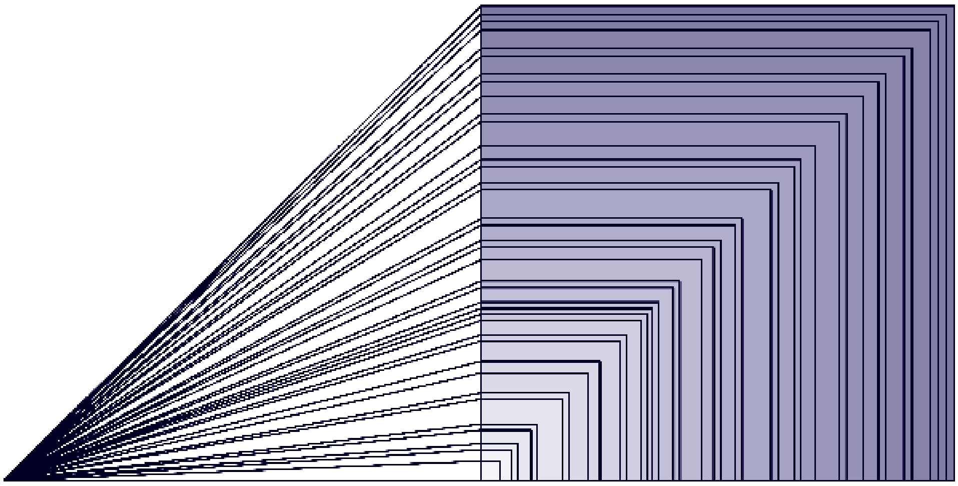
Hoe is de tabel gemaakt?

In de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) staat een methode om pythagoreïsche drietallen te maken: kies gehele getallen p en q met $p > q$ en vorm $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$. De oude Babyloniërs zullen die methode ook wel gekend hebben. In elk geval kan Plimpton 322 ermee verklaard worden. De methode is algemeen bruikbaar, maar de maker van Plimpton 322 heeft speciale keuzen voor p en q gemaakt. Hij wilde dat elk getal $a = 2pq$ alleen maar priemfactoren 2, 3 en 5 zou bevatten. Dan moet hetzelfde voor p en q gelden. Ik noem getallen die uitsluitend priemfactoren 2, 3 en 5 bevatten, in dit verband *reguliere* getallen; de rij van alle reguliere getallen begint als volgt:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, ...
Voor de getallen in de tabel geldt ook dat $b^2/a^2 < 1$, dus dat $b < a$. Dan moet $p^2 - q^2 < 2pq$ zijn, oftewel $(p - q)^2 < 2q^2$ dus $p < (1+\sqrt{2})q$. Gecombineerd met $1 \le q < p$ levert dit de voorwaarde dat p en q reguliere getallen moeten zijn met $1 \le q < p < (1+\sqrt{2})q$.
En natuurlijk neem je $ggd(p,q) = 1$ want (kp,kq) geeft hetzelfde pythagoreïsche drietal als (p,q) op een factor k^2 na.

Conway en Guy hebben waarschijnlijk alle reguliere paren (p,q) bepaald met $q < 60$ die aan de bovenstaande voorwaarden voldoen, de bijbehorende getallen a, b, c en b^2/a^2 uitgerekend en in de Babylonische notatie omgezet, en de rijen vervolgens gerangschikt naar dalende grootte van b^2/a^2 (de tweede kolom in hun tabel). De eerste vijftien rijen van hun tabel komen dan overeen met Plimpton 322 op een paar gemakkelijk verklaarbare foutjes na die de Babylonische rekenaar destijds gemaakt moet hebben; Conway en Guy geven gemotiveerde verklaringen voor die kleine correcties.

Controles, suggesties en vragen

Het is leuk om het werk van Conway en Guy op een regenachtige zondagmiddag te controleren, liefst zonder rekenmachine, want die hadden de



FIGUUR 5 De aangevulde tabel van Conway en Guy in beeld gebracht

Babyloniërs ook niet. Je zult dan constateren dat Conway en Guy vier paren (p,q) vergeten zijn, namelijk (27,16), (32,25), (36,25) en (40,27). Hun tabel zou dus eigenlijk 38 rijen moeten bevatten. Overigens, de heren zijn in hun boek niet al te duidelijk over de criteria volgens welke zij hun tabel hebben samengesteld. Misschien is er dus toch een plausibele verklaring voor hun 'omissies'; ik heb die echter niet kunnen vinden.

Uit $ggd(p,q) = 1$ volgt dat $ggd(a,b,c) = 1$ is wanneer één van beide getallen p en q even is, en dat $ggd(a,b,c) = 2$ is wanneer p en q allebei oneven zijn. In dat laatste geval kun je a, b en c dus door 2 delen, hetgeen Conway en Guy ook steeds gedaan hebben.

Er is iets vreemds aan de hand met rij 11: daar staat $a = 60$, $b = 45$ en $c = (1)(15) = 75$. Dat is blijkbaar het bekende drietal $(a,b,c) = (4,3,5)$, vermenigvuldigd met een factor 15. Maar als je b en c als Babylonische breuken leest, namelijk $b = 0,(45)$ en $c = (1),(15)$, krijg je $a = 1$, $b = 3/4$ en $c = 1 + 1/4$ en dat is Babylonisch gezien eigenlijk eenvoudiger dan (4,3,5). In feite kun je *alle* getallen a herleiden tot een macht van 60, dus, in Babylonische notatie, tot (1), door ze met een geschikte reguliere factor te vermenigvuldigen. Dat zou kunnen verklaren waarom er in de Plimpton-tablet geen kolom voor de getallen a is: die zijn dan toch allemaal (1). En door b met diezelfde reguliere factor te vermenigvuldigen en het resultaat te kwadrateren krijg je de eerste kolom van die tablet, zonder breuken! Dat lijkt tevens de eenvoudigste manier te zijn om de Plimpton-tabel te maken.

In figuur 5 heb ik de door Conway en Guy gereconstrueerde Plimpton-tabel (aangevuld met de vier extra items) in beeld gebracht via rechthoekige driehoeken met basislengte 1 en opstaande rechthoekszijde van lengte b/a. De daarop geconstrueerde vierkanten hebben dus oppervlakte b^2/a^2, de getallen uit de tweede kolom. De grootste 15 vierkanten corresponderen met de regels van de oorspronkelijke Plimpton-tablet.

Blijft nog het raadsel wat het nut van deze tabel geweest kan zijn. Daarover zijn allerlei speculaties geuit, maar geen van alle zijn ze erg bevredigend. De vraag is vooral ook waarom de rijen op de tablet gerangschikt zijn naar dalende volgorde van de eerste kolom. Waarschijnlijk zijn de rijen eerst via de paren (p,q) berekend, en pas later op volgorde gezet. Dat zou ook verklaren waarom er een aantal (overschrijf?)fouten ingeslopen zijn.
Waarvoor werd die eerste kolom gebruikt? Was het een soort goniotabel? Werd die misschien bij astronomische berekeningen toegepast? We weten het niet. Maar misschien zoeken we er veel te veel achter. Misschien was het gewoon een strafwerkopgave voor een lastige leerling tijdens de rekenles!

Naschrift

- Het bovenstaande is een uitgebreide bewerking van een gedeelte van de lezing *De oorsprong van de wiskunde* die de auteur op 27 juni 2004 in Paradiso heeft gegeven. De teksten van alle Paradisolezingen in de cyclus *De oorsprong* worden gepubliceerd in een boek dat half december verschijnt:
Niki Korteweg (samensteller): *De oorsprong / Over het ontstaan van het leven en alles eromheen.* Uitgeverij Boom, Amsterdam (2004). Prijs € 19,50; isbn 90 8506 008 7.
- Op het internet is veel over Babylonische wiskunde te vinden.
Zoek bijvoorbeeld op het trefwoord *Plimpton 322.*

Noten

[1] O. Neugebauer, A. Sachs: Mathematical Cuneiform Texts. New Haven CT: Yale University Press (1945).
[2] New York: Springer-Verlag (1996), pp. 173-176.

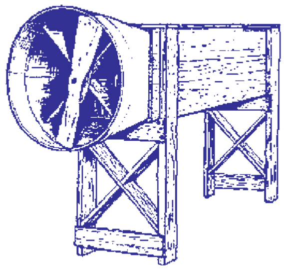
Over de auteur

Jan van de Craats (e-mailadres: craats@science.uva.nl) is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit.

REKENEN AAN STROMINGEN

Numerieke wiskunde in actie

[Arthur Veldman]



FIGUUR 1 Windtunnel van de gebroeders Wright

Inleiding

Overal om ons heen stroomt het: er stroomt lucht langs vliegtuigen, auto's en gebouwen, er stroomt water om schepen, door rivieren en havens, er stroomt olie door pijpleidingen en in ondergrondse reservoirs, er stroomt bloed door onze aderen. En dan hebben we de grootste stroming in onze omgeving nog niet eens genoemd: de stroming in de atmosfeer die ons weer bepaalt.

Het zal duidelijk zijn dat voor het voorspellen van het weer en voor het ontwerpen van vliegtuigen, auto's, schepen, etc. kennis van stromingen essentieel is. Deze kennis kan langs drie wegen verkregen worden: experiment, theorie en numerieke simulatie. We zullen hier iets dieper op ingaan, met als voorbeeld het ontwerpen van vliegtuigen.

Experiment

De oudste weg om kennis van stroming te verkrijgen is via het *experiment*. De gebroeders Wright hadden honderd jaar geleden al een kleine windtunnel gebouwd om het eerste vliegtuig te ontwerpen; zie figuur 1. Tegenwoordig zijn windtunnels imposanter; rij maar eens langs de tunnel die bij het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR) staat in de Noordoostpolder nabij Vollenhove. In zo'n windtunnel wordt een (verkleind) *schaalmodel* van het te bestuderen object onderzocht. De hoeveelheid tunneltijd voor een nieuw ontwerp bedraagt 10.000 à 20.000 uren. Zelfs als de tunnel twee shifts per dag draait (dat wil zeggen 16 uur per dag), duurt alleen het windtunnelonderzoek al drie à vijf jaar. En dan is de tijd voor modelaanmaak en het analyseren van de meetgegevens nog niet eens meegerekend...

Theorie

Stromingsonderzoek kan ook langs *theoretische* weg. Allereerst wordt bekeken welke fysische verschijnselen een rol spelen in de stroming, bijvoorbeeld diffusie, convectie of warmtegeleiding; dit wordt een *fysisch model* genoemd. Vervolgens worden deze verschijnselen gevangen in wiskundige formules. Dit *wiskundig model* bestaat vaak uit een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen die fysische behoudswetten representeren, zoals behoud van massa, impuls of energie. Al in de eerste helft van de 19e eeuw hebben de Fransman Claude Navier (1823) en de Ier George Stokes (1845) de bewegingsvergelijkingen opgesteld waar de stroming van lucht en water aan voldoet: de Navier-Stokes vergelijkingen. Deze zien er imposant uit (zie figuur 2), maar in feite zit er niet meer achter dan de Tweede Wet van Newton, bekend van de middelbare school, kracht is massa maal versnelling: $K = m \times a$

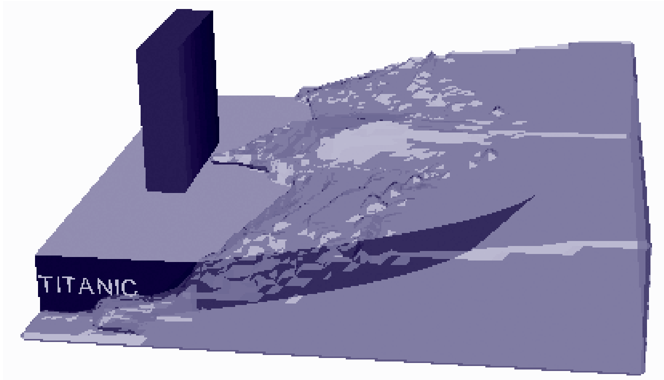
Het zijn wiskundig knap lastige vergelijkingen, die in hun algemeenheid niet met potlood en papier op te lossen zijn. Alleen als we ze zeer sterk vereenvoudigen is langs deze weg inzicht in de stroming te verkrijgen. Helaas wordt daarbij veel fysica 'weggegooid', waarna de relevantie voor de praktijk beperkt is.

Numerieke simulatie

Dankzij de komst van computers ligt een nieuwe, derde, weg voor ons open: numerieke simulatie (ook wel computersimulatie genaamd). We proberen hierbij om de Navier-Stokes vergelijkingen met wiskundige rekenmethoden op de computer op te lossen. Het betreffende vakgebied heet *numerieke stromingsleer* (in het Engels: Computational Fluid Dynamics - CFD). Eigenlijk is dit vakgebied al zo'n honderd jaar geleden begonnen, toen een zaal vol 'rekenmeisjes' de rol van 'menselijke' computer vervulde[1]. Een 'dirigent' zorgde voor synchronisatie van de berekeningen, en tussenresultaten werden via blaadjes papier uitgewisseld. Figuur 3 toont een resultaat van moderne CFD: een berekening van een grote golf die over de voorplecht van een schip slaat. Hoe zo'n berekening in elkaar zit, wordt hieronder uitgelegd. In dit voorbeeld zijn de scheepsbouwers geïnteresseerd in de krachten die zo'n grote golf uitoefent op de scheepsconstructie; ze willen dat bovendien in een

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{u}}_{\textit{versnelling}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho\boldsymbol{u}}_{\textit{convectie}} = \underbrace{-\nabla p}_{\textit{druk}} + \underbrace{\mu\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{u}}_{\textit{diffusie}}$$

FIGUUR 2 De Navier-Stokes vergelijkingen voor onsamendrukbare stroming



FIGUUR 3 Berekening van een grote golf die over een schip slaat.

voor hen begrijpbare vorm. Visualisatie van de bladzijden vol getallen die uit een berekening komen, is daarmee een belangrijk onderdeel van CFD.

Modelleren

Evenals de theoretische ‘potlood-en-papier’ aanpak begint computersimulatie bij het beschrijven van de stroming die we willen analyseren. En ook nu worden de Navier-Stokes vergelijkingen nog vaak vereenvoudigd om de rekentijden niet al te groot te laten worden. Deze stap, waarbij je afweegt welke fysica voor het probleem belangrijk is en welke niet, heet *modelleren*. Het resultaat is een wiskundig model waarin een aantal aspecten van de stroming verwaarloosd zijn. Zo wordt bijvoorbeeld het stromende medium onsamendrukbaar verondersteld (geen schokgolven) en/of de stroperigheid (viscositeit) van de stroming wordt verwaarloosd. In een dergelijke situatie kan de stroming worden beschreven met behulp van een (snelheids)potentiaal, analoog aan de potentiaal uit de elektriciteitsleer; de stroming wordt veroorzaakt doordat de potentiaal van plaats tot plaats verschillend is. In termen van het weer mag je ook aan de stroming ten gevolge van drukverschillen denken, waarbij je aanneemt dat de lucht rechtstreeks van hoge druk naar lage druk stroomt. Met deze aanname verwaarloos je de invloed van de draaiing van de aarde, die beschreven wordt door de bekende wet van Buys-Ballot: op het noordelijk halfrond krijgt de stroming een afwijking naar rechts. Dit is nou een voorbeeld van modelleren, in dit geval bedoeld om de formules hieronder niet al te moeilijk te laten worden.

Discretiseren

Vervolgens wordt het wiskundig model *gediscretiseerd* op een rekenrooster. Het hele stromingsgebied wordt daarbij opgedeeld in kleine blokjes; op ieder van deze blokjes worden de behoudswetten uit het wiskundig model toegepast. **Figuur 4** toont een voorbeeld van een rekenrooster voor een Fokker 50. Om de discretisatie verder uit te leggen wordt voor de eenvoud het rooster twee-dimensionaal en rechthoekig verondersteld, met gelijke maaswijdtes h in beide richtingen; **zie figuur 5**. Voor iedere roostercel wordt nu discreet een behoudswet opgesteld. Nb. De snelheidscomponenten in horizontale en verticale richting geven we aan met u en v, de potentiaal met P, en met ‘kompasindices’ worden de buurcellen aangeduid. Massabehoud in een roostercel houdt in dat de totale doorstroming door alle vier zijwanden op nul moet uitkomen. De doorstroming door bijvoorbeeld de rechterwand van de gearceerde cel C kan worden benaderd door de snelheid loodrecht op deze wand te vermenigvuldigen met de lengte van de wand, en wordt daarmee $u_O h$. Sommatie over alle vier de zijwanden levert nu de discrete behoudswet:

$$u_O h + v_N h - u_W h - v_Z h = 0 \qquad (1)$$

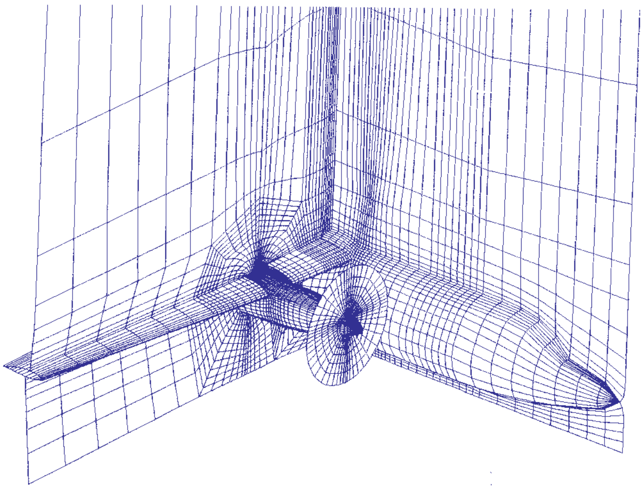
De snelheid loodrecht op de zijwanden van de cel wordt benaderend gevonden door het potentiaal-verschil tussen de aangrenzende cellen te delen door de afstand (dus in feite door te kijken naar de helling van de potentiaal). Op de rechterzijwand leidt dit tot

$$u_O = \frac{P_O - P_C}{h}$$

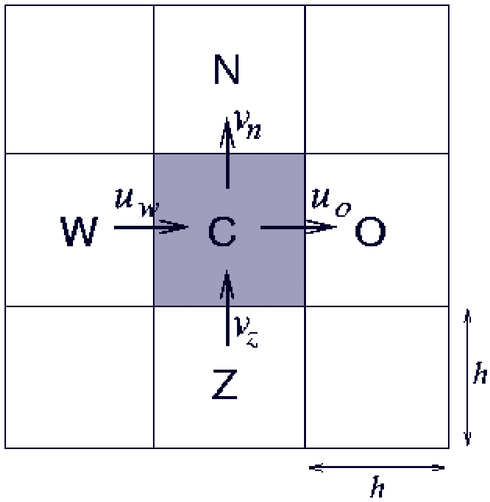
Voor de andere drie zijwanden gelden soortgelijke formules. Dit ingevuld in (1) geeft:

$$P_O + P_N + P_W + P_Z - 4P_C = 0 \qquad (2)$$

Dit is de klassieke ‘vijfpuntsformule’ voor de potentiaalvergelijking, ook wel vergelijking van Laplace genoemd. Op deze wijze ontstaat voor elke cel één discrete vergelijking. Na toevoeging van randvoorwaarden kan de potentiaal in de cellen worden gevonden door het volledige stelsel vergelijkingen op te lossen. Bij discretisatie zie je geen details die kleiner zijn dan een roostercel; de



FIGUUR 4 Deel van een rekenrooster om een Fokker 50 (bron: NLR)



FIGUUR 5 Schematisch rekenrooster met behoudscel

oplossing bevat daarmee een fout, de zogenaamde *discretisatiefout*. Deze fout kan worden verkleind door verfijning van het rooster. In ons voorbeeld leidt halveren van de maaswijdte tot een vier keer kleinere fout, maar ook tot een vier keer groter stelsel vergelijkingen, wat meer rekeninspanning vereist om dit stelsel op te lossen (bij de hieronder beschreven oplosmethoden zelfs 16 keer meer).
Een afweging tussen nauwkeurigheid en rekeninspanning is hier vereist.

Itereren

Het aldus ontstane stelsel, het *numeriek model*, is vaak erg groot. Een rooster met twee miljoen cellen (zoals tegenwoordig gebruikt voor het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen) leidt tot een stelsel met tien miljoen vergelijkingen. Het oplossen hiervan is erg 'duur', en vereist de slimheid van de numericus en de snelheid van de computer. Het oplossen gebeurt meestal *iteratief*, waarbij altijd eerst een schatting voor de oplossing, zeg $P = P^{(\text{oud})}$, wordt gemaakt. De eenvoudigste iteratieve methode ontstaat daarna door uit (2) een verbeterde waarde voor P_C te bepalen via

$$P_C^{(\text{nieuw})} = \tfrac{1}{4}\left(P_O^{(\text{oud})} + P_N^{(\text{oud})} + P_W^{(\text{oud})} + P_Z^{(\text{oud})}\right) \qquad (3)$$

Dit proces, al bekend uit het begin van de 19e eeuw en genoemd naar Jacobi, kan herhaald worden tot het verschil met de gewenste oplossing voldoend klein is geworden.
Deze methode is weliswaar eenvoudig te programmeren, maar niet erg snel. Op eenvoudige wijze is een verbetering te maken door in het iteratievoorschrift (3) meteen gebruik te maken van de nieuwe waarden zodra die er zijn. Als we bijvoorbeeld linksonder in het rooster beginnen, dan zijn de waarden voor P_W en P_Z al vernieuwd op het moment dat we aankomen in cel C, en kunnen we het voorschrift aanpassen tot

$$P_C^{(\text{nieuw})} = \tfrac{1}{4}\left(P_O^{(\text{oud})} + P_N^{(\text{oud})} + P_W^{(\text{nieuw})} + P_Z^{(\text{nieuw})}\right) \qquad (4)$$

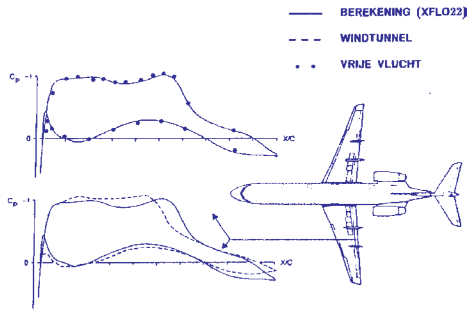
Met de theorie achter de numerieke wiskunde kan bewezen worden dat deze aanpassing, de methode van Gauss-Seidel, twee keeer sneller tot resultaat leidt dan de methode van Jacobi.

Valideren

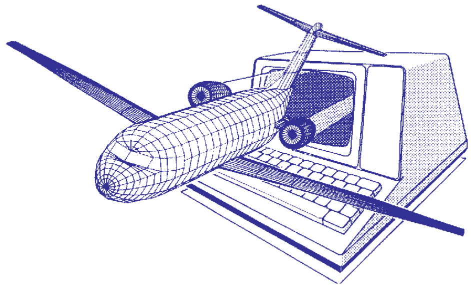
De resultaten worden zichtbaar gemaakt in voor de ontwerper te interpreteren vorm, zoals de drukverdeling rond een vleugelprofiel; zie figuur 6. De druk aan boven- en onderkant van de vleugel is weergegeven; het oppervlak tussen de twee krommen is de draagkracht die de vleugel ondervindt. Voor het bepalen van de waarde van de resultaten (validatie) worden ze vaak vergeleken met experimenten. In de figuur staat een vergelijking van een berekende drukverdeling met een windtunnelmeting (linksonder in figuur 6). De krommen zijn duidelijk verschillend; welke is de beste? Van de berekening weten we al dat die slechts bij benadering goed is, omdat we de Navier-Stokes vergelijkingen vereenvoudigd hebben. Maar ook de windtunnelmeting is niet correct, omdat de wanden van de tunnel de stroming verstoord hebben en vanwege schaaleffecten (we hebben het vliegtuig kleiner gemaakt, maar de luchtmoleculen niet). Hiervan hebben we geen last als de metingen in vrije vlucht uitgevoerd worden. Nu zien we dat de berekening nauwkeuriger is dan de windtunnelmeting, en goed overeenkomt met de werkelijkheid.

CFD naast experiment

Het gebruik van Computational Fluid Dynamics, CFD, heeft een aantal voordelen boven het gebruik van experimentele methoden. Het is tijd- en kosten-besparend (als we de aanmaak van de benodigde programmatuur niet meerekenen), en het biedt de gelegenheid situaties te onderzoeken die experimenteel niet na te bootsen of te gevaarlijk zijn. Een voorbeeld is de terugkeer ('re-entry') van ruimtevaartuigen in de atmosfeer. Op zijn eerste vlucht is de Space Shuttle, die oorspronkelijk alleen



FIGUUR 6 Vergelijking tussen berekening, windtunnelmeting en vrije vlucht voor een Fokker 100 (bron: NLR)



FIGUUR 7 De optimale Fokker 100 komt uit de computer (bron: NLR)

met de windtunnel is ontworpen, bijna verongelukt: de aerodynamische kleppen hebben een hele tijd in de uiterste stand moeten staan om heelhuids de dampkring binnen te komen. Oorzaak: in de windtunnel konden de omstandigheden zoals die boven in de atmosfeer gelden onvoldoende worden nagebootst. Met CFD lukt dit beter, en het verdere Space Shuttle ontwerp is dan ook in belangrijke mate via CFD-berekeningen uitgevoerd. Een ander voorbeeld is het ontwerpen van efficiëntere verbrandingsprocessen (benzinemotor, verwarmingsketel), waarbij tijdens het testen explosiegevaar bestaat.

Verder heeft CFD de unieke mogelijkheid tot 'invers' rekenen: in plaats van het analyseren van de eigenschappen van een serie ontwerpen tot een geschikt ontwerp gevonden is, kunnen de gevraagde eigenschappen ingevoerd worden. Het zou mooi zijn als we de computer konden opgeven hoeveel passagiers het vliegtuig moet kunnen vervoeren, en dat dan het beste vliegtuig (dat wil zeggen met het laagste brandstofverbruik, de laagste onderhoudskosten, enz.) uit de computer komt 'vliegen'; zie figuur 7. Dat dit geen toekomstmuziek is blijkt uit de Boeing 777, die volledig met behulp van de computer is ontworpen. Het is niet zo dat experimenten hierdoor overbodig worden; ze blijven noodzakelijk om het realiteitsgehalte van de computersimulaties te toetsen. Op deze wijze vullen experiment en computersimulatie elkaar aan.

Uitdaging

De afgelopen decennia is veel vooruitgang geboekt in het versnellen van numerieke methoden en computers (beide ongeveer evenveel!), maar we zijn nog niet waar we wezen willen. Om de rekeninspanning hanteerbaar te houden moeten tot dusver veel details van de stroming worden gemodelleerd. In veel gevallen is dit niet goed genoeg om de gewenste nauwkeurigheid te halen. Om in termen van weersvoorspelling te blijven: als je windhozen zou willen voorspellen, moet het rekenrooster voldoende fijn zijn, met een maaswijdte van een meter of 10 (liefst nog minder). Als we ook in de hoogte (de troposfeer waar het weer zich afspeelt, is zo'n 10 km dik) deze maaswijdte aanhouden, dan liggen alleen al boven Nederland ongeveer 300 miljard rekencellen (een 3 met 11 nullen)! Een weersvoorspelling voor de volgende dag kost dan, met de huidige numerieke methoden en computers, pakweg 10 jaar aan rekentijd: het weerbericht komt dan als mosterd na de maaltijd. Het zal duidelijk zijn: we moeten nog een aantal jaren een compromis zien te vinden tussen de rekenmogelijkheden die we bezitten enerzijds, en de wensen uit de praktijk anderzijds. Hier ligt een grote uitdaging, niet alleen voor computerontwerpers en fysici, maar ook voor numeriek wiskundigen.

Enkele interessante CFD-websites

- *www.cfd-online.com*
- *www.cerfacs.fr/cfd/gallery_index.php*

Noot van de redactie

[1] Meer over die 'rekenmeisjes' valt te lezen in het artikel van Gerard Alberts op pagina 200 e.v.

Over de auteur

Arthur Veldman (e-mailadres: veldman@math.rug.nl) werkte na zijn studie wiskunde 13 jaar bij het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium in Amsterdam. Sinds 1990 is hij hoogleraar Technische Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen, met als belangrijkste werkterrein de numerieke stromingsleer. Voorbeelden van onderzoek uit zijn groep zijn te vinden op de website www.math.rug.nl/~veldman/cfd-gallery.html.

UIT DE DOOS VAN MIJN VADER: EEN MULO-EXAMEN

[Gert de Kleuver]

REKENEN. (Tijd $1\frac{1}{2}$ uur)

1. $\dfrac{3{,}25 - (1{,}6 - 1^1/_4)}{5^1/_2 : 4^8/_9 \times 0.75} \times \dfrac{3{,}2 \times 1{,}5^2}{15 + (3^1/_2)^2 : 0{,}875} =$

2. Van een evenredigheid is de eerste term $^3/_8$ × de vierde term. Het produkt van de tweede en de derde term is 96. De derde term is 6 groter dan de eerste term. Welke is de evenredigheid?

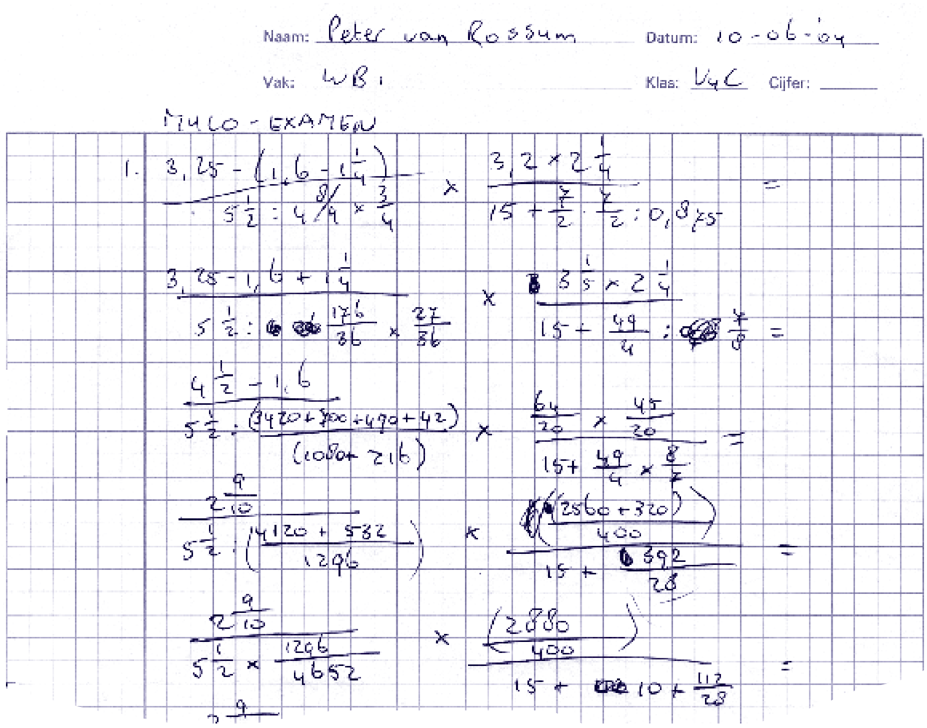
3.

6,873 m^3 =	....	dal	0,085 ha =	....	m^2
0,067 hl =		,,	7459 dm^2 =		,,
17,6 l =		,,	11 km^2 =		,,
840 cl =		,,	58041 cm^2 =		,,
12,9 dm^3 =		,,	73 dam^2 =		,,
0,48 dl =		,,	865 ca =		,,
Samen		dal	Samen		m^2

4. Iemand koopt een huis voor ƒ 12.500,—. Om de koopprijs te kunnen betalen leent hij $^3/_5$ gedeelte hiervan tegen 4 % 's jaars. Hij verhuurt het huis voor ƒ 70,— per maand. Aan onderhoud en belasting betaalt hij jaarlijks ƒ 290,—. Hoeveel procent trekt hij per jaar van zijn geld?

5. Een paraffinepot (middellijn 42 cm) heeft de vorm van een cilinder en bevat 33,1 liter paraffine. Met behulp van een tang dompelt men in deze pot een kogelrond Edammer kaasje (middellijn 14 cm) geheel onder. Het gedeelte van de tang, dat mee ondergaat, heeft een inhoud van $112^2/_3$ cm^3. Hoe hoog komt de vloeistof in de pot te staan? ($\pi = 3\,^1/_7$).

FIGUUR 1 MULO-examen REKENEN (1946)



FIGUUR 2 Gedeeltelijke uitwerking van Peter van Rossum (2004)

Zolder

Je hebt wel eens een dag waarop je ineens zin krijgt om de zolder op te ruimen. Op zo'n dag, alweer enige tijd geleden, vond ik op mijn zolder een paar dozen met schoolboeken die nog aan mijn overleden vader toebehoord hadden. Daarin zat een klein boekje met daarin het gehele mulo-examen van 1946 - je zou kunnen zeggen, een voorloper van de huidige examenbundel. Hoe het boekje in die doos terecht was gekomen, is mij een raadsel, want mijn vader deed in die tijd examen hbs-b.
Tijdens de redactievergadering van januari 2004 werd het thema voor de special van januari 2005 vastgelegd: rekenen. Nu stond er in mijn boekje een mulo-rekenexamen (zie figuur 1). Bij mij kwam toen het idee boven om enkele opgaven van dit examen door twee van mijn klassen te laten maken: een vwo-4-klas met profiel NG en een brugklas havo/vwo.

Brugklas

De brugklassers waren het eerst aan de beurt.
Toen ik het examen introduceerde, leek het hen wel makkelijk. Ik liet ze opgave 1 maken. Enkele leerlingen probeerden de uitkomst met behulp van de rekenmachine te vinden, anderen vonden het leuker om het met pen en papier uit te rekenen. Ik had verteld dat men vroeger geen rekenmachines had. Vaak werden dan decimale getallen herschreven tot breuken; men had vroeger immers grote vaardigheid in breukrekenen.
Na ongeveer een kwartier kwamen de verschillende antwoorden. Mijn brugklassers vonden het omwerken van gewone breuken in decimale getallen en omgekeerd ontzettend moeilijk. Er ontstond bovendien discussie over de noemer $5\frac{1}{2}:4\frac{8}{9}\times 0{,}75$.
De rekenmachine werd er bijgehaald. Sommige leerlingen hadden gehoord over de volgorde van de bewerkingen delen en vermenigvuldigen. Vroeger had vermenigvuldigen voorrang boven delen. Tegenwoordig hebben we afgesproken dat deze twee bewerkingen gelijkwaardig zijn en dus wordt er gewoon van links naar rechts gerekend. Toen ik dat vertelde, zag ik verschillende kinderen bedenkelijk kijken. Het duurde even voordat ze begrepen wat ik bedoelde.
Opgave 3, over het omwerken van allerlei maten, herkenden zij, want zij hadden net daarvoor heel wat van dit soort opgaven tijdens de wiskundeles gemaakt.
Vervolgens opgave 4. Een huis van 12 500 gulden. Ja, eerst even schatten: het huis kostte toen ongeveer 5600 euro. Dat was nog eens goedkoop! Waarom je dan direct dat huis ging verhuren... De leerlingen dachten aan een heel rijke persoon, die gewoon een huisje erbij kocht.
De brugklassers vonden het leuk en leerzaam; ze kregen wel bewondering voor de enorme rekenpartij die vroeger zonder machine uitgevoerd moest worden. Dan te bedenken dat het in totaal maar vijf opgaven waren, waarvoor destijds kennelijk maar anderhalf uur uitgetrokken was...

Vwo-4

Vervolgens deelde ik het examen uit aan de vwo-4-leerlingen. Ik vroeg hen nadrukkelijk, hun uitwerkingen op te schrijven en in te leveren.
Ook hier begonnen enkele leerlingen met het invoeren van opgave 1 in de grafische rekenmachine. Dat viel tegen. Het intoetsen van de breuken gaf veel problemen. Al die haakjes! En wáár zet je die dan precies? Al snel begonnen ze de opgave in onderdelen uit te rekenen.
De andere helft van de leerlingen probeerde zonder rekenmachine een oplossing te vinden. Jammer genoeg hadden de meeste leerlingen te weinig rekenvaardigheid om de breuken uit te rekenen. Eén leerling ging heel rustig zijn gang; zie voor zijn werk figuur 2. Hij maakt in het begin breuken onnodig gelijknamig, maar komt wel een heel eind.
Opgave 2, over een evenredigheid, werd helemaal niet begrepen. Ik denk dat er ook wel collega's zullen zijn die zich drie keer achter de oren krabben. Op deze wijze hoort het immers niet meer bij het huidige rekenonderwijs. Voor zover ik het kan bekijken bedoelt men iets in de trant van $a : b = x : y$.
Bij opgave 5 viel het mijn leerlingen op dat pi benaderd werd door $3\frac{1}{7}$. Deze opgave werd als een natuurkunde-opgave ervaren. 'Dit is toch geen wiskunde!' Kennelijk doe je bij wiskunde heel andere dingen dan bij natuurkunde...
Mijn leerlingen kregen echt bewondering voor de leerlingen die in 1946 dit examen hebben moeten maken. Ze schreven vaak op: 'Het leek weinig en niet zo moeilijk, maar dat viel tegen.'

Voldoening

Ik vond het een geslaagd experiment om leerlingen kennis te laten maken met een oud examen. Zij hebben ondervonden dat het rekenen van 'vroeger' voldoening gaf als het antwoord correct was. Maar ja, aan de andere kant heb je tegenwoordig toch de moderne hulpmiddelen. En die zijn er om het rekenwerk eenvoudiger te maken.

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is docent aan het Ichthus College te Veenendaal en redactievoorzitter van Euclides.

Boekbespreking / 18 eeuwen Meten en wegen in de Lage Landen auteur: G.J.C. Nipper uitgever: Walburg Pers, Zutphen (2004)

isbn 90 5730 280 2 prijs: € 39,50 **[Danny Beckers]**



Oppervlakte en inhoud

Het metrieke stelsel is lastig. Zelfs voor veel gymnasium-leerlingen spreekt het omrekenen van kubieke decimeters naar kubieke centimeters niet vanzelf. Laat staan als dan, voor de afwisseling, eens gevraagd wordt naar het aantal deciliters dat in een liter zit. In een proefwerk voor 2-gymnasium over gelijkvormigheid had ik afgelopen jaar een opgave verwerkt waarin een bak was gegeven voor strooizand. De afmetingen van de bak waren bekend en tevens was gegeven dat met de inhoud van de (volle) bak precies 500 vierkante meter wegdek kon worden behandeld tegen gladheid. Nu wilde de gemeente de bak uitvergroten, zodanig dat er 1000 vierkante meter wegdek mee kon worden bestreken. Mijn intentie was dat leerlingen de inhoud van de bak (die ze bij het eerste onderdeel hadden uitgerekend) zouden gebruiken om de nieuwe inhoud uit te rekenen, en dan vervolgens de derdemachtswortel (uit 2) zouden trekken om de lineaire vergrotingsfactor uit te rekenen. Helaas had ik me onvoldoende gerealiseerd dat de wegdek-oppervlaktes die ik noemde als inhoudsmaat fungeerden. Ik werd met de neus op de feiten gedrukt toen een aantal leerlingen in hun uitwerking een tweedemachtswortel trok.

Oude maten: intuïtief duidelijk

Vóór 1820 had iedere stad of streek zijn eigen stelsel van maten en gewichten. Die stelsels waren vaak niet tientallig onderverdeeld. Hoewel ze hopeloos ingewikkeld lijken, missen ze precies het probleem dat ik hierboven beschrijf. Het metrieke stelsel, met de meter als grondslag voor alle lengte-, oppervlakte-, inhoudsmaten en gewichten, werd in Nederland in 1820 ingevoerd. Het is juist de samenhang tussen de verschillende soorten maten die het metrieke stelsel zo moeilijk maakt. De oude maten en gewichten hadden een intuïtieve achtergrond en waren zodoende gemakkelijker in het gebruik – voor degenen die niet dagelijks de Amsterdamse maten hoefden om te rekenen naar de maten van 's-Hertogenbosch. Welke waarden de oude maten- en gewichtenstelsels representeerden is vaak maar lastig te achterhalen. Het boek *18 eeuwen Meten en wegen in de Lage Landen* van Nipper behandelt juist die oude maten en gewichten.

Oorspronkelijk vervulden maten- en gewichten-stelsels zowel een kwalitatieve als een kwantitatieve functie. Zo werd het vat in wijnstreken wel als oppervlaktemaat gebruikt. Een wijngaard van 12 vaten bracht per jaar ongeveer twaalf vaten wijn op. Voor de oppervlakte van het land in onze streken werd vaak de bunder gebruikt. Een bunder is een op een bepaalde wijze samengebonden pakket graan. Ook de morgen was veel in gebruik. Die werd benut om aan te geven hoeveel tijd het kostte om een stuk land om te ploegen. Een aantal uren gaans werd gebruikt om aan te geven wat de afstand was tussen twee plaatsen. Met de 'meetwaarde' werd zodoende tevens een kwalitatief oordeel over het te meten object meegegeven: over de opbrengst van een stuk land, over de zwaarte van de grond, of over de toestand van de weg tussen twee plaatsen. Dat was nuttige informatie voor mensen voor wie niet iedere hectare grond veredeld kon worden, voor wie het ploegen niet machinaal geschiedde maar aanzienlijk zwaarder was wanneer door stevige klei moest worden geploegd, en voor wie niet alle plaatsen door middel van asfalt met elkaar verbonden waren. In dit verband is het overigens wel aardig dat recentelijk de idee is geopperd om (in verband met de files) de matrixborden langs onze autowegen te voorzien van een tijdsaanduiding voor de reistijd naar de grote steden. Blijkbaar voldoet de kilometer ook in onze gemotoriseerde en geasfalteerde tijd niet langer!

IJkers en stelsels

Lokale overheden hadden belang bij een eenduidige interpretatie van de diverse maten. De oorspronkelijke kwalitatieve betekenis van de oude stelsels verdween zodoende tegen het eind van de middeleeuwen. Plaatselijk kregen het vat en de morgen een vaste waarde, waarvan de standaarden centraal bewaard werden: sommige steden hebben nog steeds een Waag op het oude marktplein staan. Het ijkwezen werd in het leven geroepen om ervoor te zorgen dat de maten en gewichten die gebruikt werden gelijk waren aan de standaard. Sinds de zestiende eeuw waren er overal in ons land ijkers actief, die in opdracht van de lokale overheden maten en gewichten standaardiseerden. Het boek van Nipper behandelt allerlei meeteenheden uit de antieke wereld (Egypte, Babylon, Rome) en de middeleeuwen. Vanaf de zestiende eeuw beperkt Nipper zich tot de meetstelsels in de Nederlanden. In de verschillende, geografisch georganiseerde hoofdstukken, krijgt de lezer een overzicht over de maten (met hun huidige

metrieke equivalenten), verschillende manieren van meten en wegen en over de wettelijke regelingen die in de diverse streken het meten aan banden legden.

IJkers waren veelal wiskundig onderlegde mensen. Wanneer een wiskundig onderlegd persoon (een landmeter of ijker) een oppervlakte moest bepalen, dan deed hij dat door middel van het opmeten van lengtes en hoeken –hij voerde een triangulatie uit van het stuk land waarvan hij de oppervlakte wilde weten. IJkers waren zich zodoende bewust van de mogelijkheid om een oppervlakte- en een inhoudsmaat af te leiden van een lengtemaat. Het behoeft dan ook geen verbazing dat in sommige streken de morgen was onderverdeeld in (veelal 300) vierkante roeden (de roede was een veelgebruikte lengtemaat).

Mogelijkheden en beperkingen

Geen boek is perfect en zo valt er ook hier wel wat af te dingen. De ijkmeesters van Venlo – bijna twee eeuwen lang een functie vervuld door de familie Mans – hebben biologische symbolen staan bij wat vermoedelijk hun geboorte- en sterftejaren moeten zijn. Ook de noten wemelen van de zetfouten (zo staat er een paar dozijn punten teveel) die met een goede redactie te voorkomen waren geweest. Dat is spijtig. Verder ontbreekt een historische lijn in de ontwikkeling van de maten en gewichten –de auteur is overduidelijk niet historisch geschoold. Daar staat tegenover dat de meeste leerlingen daar overheen zullen kijken en toch waardevolle informatie opdoen. Voor een indrukwekkend aantal steden en dorpen zijn nadere gegevens te vinden over de gebruikte maten en gewichten, de namen van de ijkers die actief waren, de meetpraktijk en de wettelijke kaders van het ijkwezen.

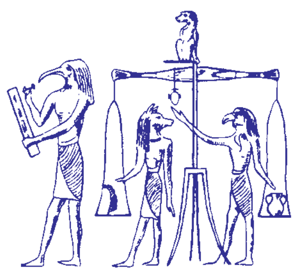
Het boek van Nipper vormt een goed beginpunt voor een historische speurtocht met een duidelijke wiskundige meerwaarde. Wat te denken van de vraag naar de winst van een koopman die te Den Haag graan kan verkopen voor 3 duiten per maatje, terwijl hij dat graan te Breda tegen een gulden per sester kan inkopen. Dergelijke vragen zijn er – bij goed uitgezochte combinaties van steden zelfs voor verschillende jaren – eindeloos te bedenken. Met het boek van Nipper in de hand zijn deze vragen eenvoudig te beantwoorden. En het aardige is dat ze op conceptueel vlak een stuk eenvoudiger blijken dan de vraag over de afmetingen van de kist met strooizand, omdat de oude maten allemaal lineair in elkaar zijn uit te drukken en de leerling niet in de verleiding kan komen om oppervlakte- en inhoudsmaten met elkaar te verwarren. Dit soort opgaven kan zodoende dienen om te illustreren dat een universeel stelsel van maten en gewichten (zij het metriek of niet) toch behoorlijke voordelen kan hebben, en biedt tevens een inleiding tot de conceptueel veel lastiger metrieke maten. En dat allemaal overgoten met een aardig authentiek sausje uit de eigen streek. Met een beetje geluk kan van een aantal oude gebouwen (de Waag, een kerk, een stadspoort, ...) nog worden bepaald hoe zeer de ambachtslieden ze op het oog hebben vervaardigd, of dat er een keurig geheel aantal oude lengtematen is uitgezet. Voor leerlingen een aardige kluif om te bepalen of er vroeger in Nederland systematisch of ambachtelijk werd gewerkt! Bijvoorbeeld in combinatie met (architectuur)geschiedenis een mooie opdracht. In een dergelijke opdracht kan bijvoorbeeld ook het toetsen van hypothesen verwerkt worden en zo krijgt het geheel al snel de omvang van een behoorlijk profielwerkstuk. Kortom, het boek *18 eeuwen Meten en wegen in de Lage Landen* mag eigenlijk in geen enkele schoolbibliotheek ontbreken.

Over de recensent

Danny Beckers (e-mailadres d.beckers@inter.nl.net) is wetenschapshistoricus. Hij is als docent wiskunde verbonden aan het Dominicus college te Nijmegen en waarnemend directeur van het instituut Wetenschap & Samenleving aan de Radboud Universiteit. Zijn interesse gaat onder andere uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.

FIGUUR 1 De ijker





FIGUUR 2 Egyptische dodenweegschaal



Karl Marx op 21-jarige leeftijd

Mathematikerweisheit

Wir haben alles auf Zeichen gebracht,
Aus uns'rer Vernunft ein Rechenexempel gemacht,
Ist Gott ein Punkt, so ist er kein Cylinder,
Steht ihr auf dem Kopf, so sitzt ihr nicht auf dem ...

Ist a der Geliebte, ist b die Liebhaberin,
So setz' ich meinen Kopf zum Pfande hin,
Stellt ihr auch a + b in einen Reih'n,
So wird das gar ein Liebespaar sein.

Mit Strichen die Welt gemessen,
Haben nie den Geist herausgefressen,
Mit a und b die Zwiste abgemacht,
So wär' das Gericht - um Sporteln gebracht.

Wiskundigenwijsheid

We hebben alles tekens gegeven,
De wereld met formules beschreven,
Als God vierkant is, dan is ie niet rond,
Wat je in je kop hebt, dat heb je niet in je ...

Als A en B zijn verloofd,
Dat wed ik om mijn hoofd,
Zetten jullie een plus tussen de B en de A,
Alsof liefde 't zelfde is als algebra.

Met lijnen de wereld gemeten,
Nooit de essentie eruit gevreten,
Loste je rechtszaken op met 1+1=2,
Konden Spong en Moskowitz in de WW.

REKENEN AAN DE MENS

Gedachten bij een gedicht van Karl Marx

[Teun Koetsier en Fredie Beckmans]

Gedicht

Op negentienjarige leeftijd schreef Karl Marx (1818-1883) het hiernaast staande door ons vrij en eigentijds vertaalde gedicht[1].
Marx stelt in het eerste couplet dat binnen de ‘wiskundigenwijsheid’ het menselijk denken tot rekenen wordt gereduceerd. Hij steekt er meteen de gek mee. In het tweede couplet maakt hij duidelijk, dat het hem helemaal absurd voorkomt om de liefde wiskundig te beschrijven. En in het slotcouplet stelt hij, dat de wiskunde de essentie van wat er in de wereld gebeurt niet kan vangen. Hij illustreert dat met het voorbeeld van de rechtspraak.
Het gedicht is geen meesterwerk, maar het roept wel vragen op. Waarom schreef Marx dit gedicht? In hoeverre had hij gelijk? Waar liggen de grenzen van de toepasbaarheid van de wiskunde?

Verlichting versus Romantiek

Historisch gezien kan men het gedicht van Marx uit 1837 als een uiting van de Romantiek beschouwen. Met name het laatste couplet doet erg aan de filosoof Georg Wilhelm Friedrich Hegel denken, die in de voorrede van zijn beroemde *Phänomenologie des Geistes* van 1807 betoogd had, dat wiskundige kennis altijd aan de buitenkant blijft en nooit het wezen van de dingen kan vatten. De Romantiek was een reactie op het Verlichtingsoptimisme van de achttiende eeuw dat met zich meebracht dat niet weinigen meenden dat alles wat van belang is met behulp van wiskundige methoden behandeld kan worden. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening, huldigde ook die opvatting. Leibniz droomde van een universele wiskundige tekentaal, een *characteristica universalis*, waarin je elk probleem zou kunnen formuleren en door middel van berekening oplossen. Leibniz zag de differentiaal- en integraalrekening als een onderdeel van die tekentaal. Als de schepping op die manier volledig begrepen kan worden, dan moet de schepper van dat alles wel een soort superwiskundige zijn. Zo zag Leibniz het dan ook. God had bij de schepping een optimalisatieprobleem opgelost. God had allerlei werelden kunnen scheppen. Hij schiep echter die wereld waarbinnen de hoeveelheid kwaad minimaal is: Hij schiep de beste van alle mogelijke werelden. Op deze manier loste Leibniz het theologische probleem van het kwaad in de wereld op: hoe kan het zijn dat een volmaakte God een wereld heeft geschapen waar zoveel ellende heerst?[2]
Het ligt voor de hand dat uit zo’n visie op de wereld als die van Leibniz volgt dat je in principe ook zou moeten kunnen uitrekenen hoe een mens gelukkig wordt. Wat God op grote schaal had gedaan, zou een slimme wiskundige op kleine schaal toch ook moeten kunnen. Toen D’Alembert in 1767 dan ook hoorde dat zijn vriend Lagrange getrouwd was, schreef hij hem gekscherend: ‘Zij schrijven me uit Berlijn dat jij wat wij filosofen de gevaarlijke sprong noemen (saut périlleux) hebt gemaakt. [...] Aanvaard mijn gelukwensen, want ik denk dat een groot wiskundige vooral in staat moet zijn om zijn eigen geluk uit te rekenen en dat jij na een berekening tot de conclusie bent gekomen dat het huwelijk de oplossing is.’[3]
Op de Verlichting volgde de Romantiek. Liefde en geluk hadden volgens de Romantici alles met gevoel te maken. Gevoelens bepalen ons handelen en drijven de geschiedenis en dat alles onttrekt zich helemaal aan berekeningen. In het voorwoord van zijn *Cours d’analyse* van 1821 schreef Cauchy: ‘Laat ons met hartstocht de wiskundige wetenschappen bedrijven [...] maar laten we ons niet inbeelden dat men de geschiedenis zou kunnen behandelen met formules of een fundering aan de ethiek zou kunnen geven met behulp van de stellingen uit de algebra of de integraalrekening.’ Leibniz was een van de belangrijkste grondleggers van de analyse. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) wordt algemeen gezien als de eerste die de analyse van een stevig fundament voorzag door het limietbegrip als uitgangspunt te nemen.[4] Wiskundig waren Leibniz en Cauchy aan elkaar gewaagd, maar waar Leibniz het vroege verlichtingsdenken vertegenwoordigde, was Cauchy een vertegenwoordiger van de Romantiek.[5]

De wiskunde en wat er zich aan onttrekt

Laat zich iets zinnigs zeggen over de grenzen van de toepasbaarheid van de wiskunde? Wie hadden er

méér gelijk, de Verlichtingsdenkers of de Romantici? Het kernpunt lijkt toch wel te zijn dat wiskunde abstract is. Als men abstraheert laat men dingen weg en dat wat men overhoudt, is per definitie abstract. Als men een wiskundig model naast de realiteit legt, zijn er uit de aard der zaak altijd aspecten van de realiteit waarvan is geabstraheerd en die vind je niet terug in het model. Modern geformuleerd legden de Verlichtingsdenkers meer de nadruk op de mogelijkheden die wiskundige modellen bieden, terwijl de Romantici meer de nadruk legden op de aspecten die zich aan modellering onttrekken en waarvan wordt geabstraheerd.

In veel opzichten hebben de Verlichtingsdenkers gelijk gekregen. Er is geen wetenschap meer waarbinnen de wiskunde niet een of andere rol speelt. Dat geldt ook voor de menswetenschappen. De Belgische wiskundige en astronoom Adolphe Quetelet (1796-1874) heeft hierbij een sleutelrol gespeeld. In 1828 constateerde hij dat de Franse misdaadstatistieken een verrassende regelmaat vertoonden. In 1826 werden er in Frankrijk 56 mensen met een vuurwapen vermoord, 23 met een stok, 2 werden gewurgd, 20 werden met stenen gedood. Voor 1827 waren die getallen respectievelijk 64 met een vuurwapen, 28 met een stok, 5 werden gewurgd en 20 werden met stenen gedood. En de daarop volgende jaren gaven eenzelfde beeld. Quetelet schreef in 1835: ‘Wat een droevige toestand waarin de menselijke soort verkeert! We kunnen van te voren uitrekenen hoeveel individuen hun handen zullen bevlekken met het bloed van hun medemens, hoeveel vervalsers er zullen zijn, hoeveel gifmengers, bijna net zoals men van te voren kan uitrekenen hoeveel er geboren zullen worden en hoeveel er zullen overlijden.’[6]

Helemaal nog in de geest van de Verlichtingsdenkers droomde Quetelet van een *sociale mechanica* waarbinnen het gedrag van een samenleving net zo te voorspellen zou zijn als het gedrag van een vast lichaam in de ruimte. De droom brengt met zich mee dat men in principe ook zou kunnen uitrekenen wat het beste overheidsbeleid is.

Tot op zekere hoogte is de droom van Quetelet uitgekomen. De statistiek heeft in het bijzonder in de twintigste eeuw een ware triomftocht gemaakt; statistische methoden worden met groot succes vrijwel overal toegepast. Echter, de kracht van deze methoden ligt juist weer in het feit dat van het bijzonder geval wordt geabstraheerd. Ze hebben betrekking op de grote aantallen en betreffen slechts deels het individu. Als we kijken naar het individu, dan hebben in ieder geval de Romantici gelijk. En zeker als emoties de individualiteit sterker doen uitkomen, in de liefde of in rechtszaken, dan lijken die zich te onttrekken aan elk wiskundig model.[7] Op dit punt had de jonge Marx gelijk.

Er komt nog een andere gedachte op in dit verband. De wetenschap wil beheersen, althans zo zien moderne romantici dat soms. Romantici benadrukken in dat verband dan de individuele vrijheid. Er bestaat onder sommige informatici een fantasie die er op neer komt dat we in de toekomst computerprogramma’s zullen kunnen schrijven die zodanig geavanceerd zijn, dat we aan robots die volgens die programma’s functioneren, niet alleen intelligentie, maar ook zelfbewustzijn en emoties moeten toekennen.[8] Een computerprogramma is een wiskundige structuur en zo’n programma is in zekere zin een complete wiskundige beschrijving van de robot. Hoe bedreigend is deze gedachte voor de romantici? Is het in principe mogelijk om een individu compleet wiskundig te beschrijven? Welnu, er zijn twee mogelijkheden. De eerste is dat deze fantasie nooit werkelijkheid zal worden. Dan kunnen de romantici op dit punt gerust slapen. De tweede is dat de fantasie wel werkelijkheid zal worden. Dan is er echter nog steeds hoop voor de romantici. Het is immers denkbaar dat de robots, juist doordat wij er in zijn geslaagd hen van wil en gevoel en creativiteit te voorzien, niet voorspelbaar zullen blijken te zijn, behalve dan met behulp van statistische methoden.

Noten

[1] Marx-Engels-Gesamtausgabe (MEGA) I.1. Met betrekking tot de vertaling: Naast ‘der Hintern’ was in de tijd van Marx ook ‘der Hinter’ in gebruik voor ‘achterwerk’. ‘Der Reihen’ is een woord voor een rijdans; het bestaat in het moderne Duits niet meer. ‘Die Sporteln’ is een oude juridische term voor bij het hof te betalen rechten. (Met dank aan Rüdiger Thiele.)

[2] Leibniz vertelt ons niet hoe God dat optimalisatieprobleem precies heeft opgelost. Het is een filosofisch argument; sommigen worden erdoor aangesproken, anderen vinden het maar onzin.

[3] J.-L. Lagrange: Oeuvres, Tome 13, pp. 100-101.

[4] Bolzano moet in dit verband ook worden genoemd, maar diens werk had nauwelijks invloed.

[5] Het is onjuist om te denken dat Marx slecht in wiskunde was en geen kennis van wiskunde bezat. Het vak interesseerde hem wel degelijk. Zie bijv. Hubert C. Kennedy’s Karl Marx and the Foundations of Differential Calculus, in Historia Mathematica 4 (1977), pp. 303-318.

[6] A. Quetelet: Sur l’homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale, Paris (1835), pp. 8-10.

[7] Waarmee wij niet willen zeggen dat emoties zich aan wiskundige modellering onttrekken. Die modellering vereist echter weer dat men abstraheert van het individu.

[8] Vergelijk bijvoorbeeld Ray Kurzweil: The Age of Intelligent Machines, MIT Press (1990).

Over de auteurs

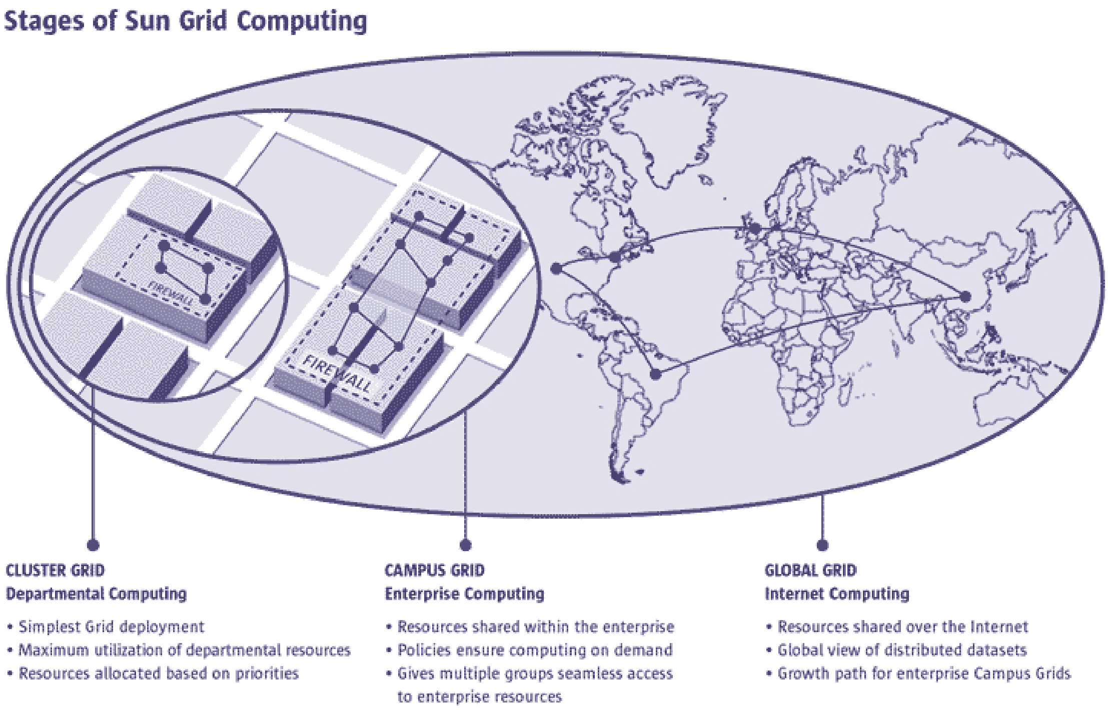
Fredie Beckmans (e-mailadres: charisma@xs4all.nl) is kunstenaar te Amsterdam. Hij maakt kunstwerken van allerlei aard. In 2001 werd hij in Berlijn wereldkampioen kookperformance. Fredie heeft zijn atelier in pakhuis Wilhelmina. Hij is ook de hoofdpersoon in de documentaire ‘Ik en Wilhelmina, van kraakpand tot kunstpaleis’ (gemaakt door Ineke Hilhorst in 2004).

Teun Koetsier (e-mailadres: t.koetsier@few.vu.nl) is docent bij de afdeling Wiskunde van de Faculteit Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit. Zijn onderzoek heeft vooral betrekking op de geschiedenis van de wiskunde.

GRID COMPUTING

Samenwerkend rekenen

[Nicolai Petkov]



Inleiding

Het ogenschijnlijke gemak van het internet in het algemeen en het World Wide Web in het bijzonder hebben onderzoekers op de gedachte gebracht dat het wereldwijde computernetwerk nog meer kan betekenen, bijvoorbeeld door middel van grid-technologieën. Het nieuwe van gridtechnologie is integratie, gecoördineerd gebruik en delen van ICT-bronnen (computers, programmatuur en gegevens) die zich op een of op verschillende locaties bevinden. Webstandaarden en -technologieën hebben een universele transparante toegang tot documenten mogelijk gemaakt; gridtechnologieën zouden hetzelfde kunnen betekenen voor computer-faciliteiten, -gegevens en -applicaties.

Wat is grid computing?

De term (*computer) grid* werd medio jaren negentig gelanceerd als een concept voor gedistribueerde computerinfrastructuur die gecoördineerd gebruikt kan worden. De naam is door de analogie met de *electrical grid*, het elektrische netwerk, geïnspireerd – het Amerikaanse elektriciteitsnetwerk wordt ‘The Grid’ genoemd.

Grids zijn dynamische, gedistribueerde ICT-omgevingen die softwaretoepassingen in staat stellen ICT-bronnen zoals reken- en opslag-faciliteiten, gegevensbanken, displays en instru-menten via een computernetwerk te integreren. De integratie kan binnen een afdeling, een instituut of een organisatie plaatsvinden of de grenzen van organisaties en netwerkdomeinen overstijgen. De gedeelde ICT-bronnen kunnen zich op dezelfde of op verschillende geografische locaties bevinden. Naar de gebruiker toe ziet een grid er uit als een integraal computersysteem, met alle benodigde faciliteiten. De gebruiker merkt niet waar deze faciliteiten zich bevinden.

Middleware

De ICT-bronnen worden met behulp van specifieke middleware geïntegreerd. Deze middleware zorgt ervoor dat aan de behoeften aan rekenkracht en opslagcapaciteit wordt voldaan zonder dat een gebruiker iets van het gedistribueerde karakter van het achterliggende systeem merkt.

Netwerkinfrastructuur

Om een grid *binnen* een organisatie te realiseren is de huidige bandbreedte en de bandbreedte die voor de komende jaren in Nederland gepland is voldoende. Men hoeft dus niet op de volgende netwerk-upgrade te wachten.
Het grootschalig toepassen van grids waarbij meerdere organisaties in meerdere netwerkdomeinen zijn betrokken kan tot meer bulk-datatransport gaan leiden, waardoor er per applicatie misschien niet meer bandbreedte nodig is, maar voor de som van de applicaties al snel wel. Gegarandeerde bandbreedte op alle niveaus kan voor veel organisatieoverstijgende grid-toepassingen essentieel zijn.

Beleid en organisatie

Grids realiseren is niet alleen een kwestie van de technologie. In vele gevallen, zoals bij een klein grid die in een organisatieonderdeel op de basis van intranet wordt gerealiseerd, is de grid-technologie uit de experimenteerfase gegroeid en is zij rijp voor inzet in de praktijk. Beleid, organisatie en management zijn nodig om locale faciliteiten dynamisch aan een grid toe te wijzen. Voordat bijvoorbeeld de pc's van de verschillende secretariaten en onderwijs-pc pools van een organisatie voor grid-toepassingen kunnen worden ingezet, moet aan diverse voorwaarden voldaan worden, die alleen langs strakke organisatorische lijnen en centrale regie te bereiken zijn. Op afdelingsniveau kan men met veiligheidsbedenkingen van systeem-beheerders te maken krijgen. Op faculteits- en universiteitsniveau leidt het gebruik van gedeelde ICT-bronnen via een grid, tot verwevenheid van de ICT-budgetten van verschillende onderdelen van de organisatie.

Voordelen

Tot de algemene voordelen die grids bieden horen onder andere: reductie van de totale kosten van eigendom, hogere efficiëntie in het gebruik van ICT-bronnen door schaalvergroting, verlaging van de drempels voor de dynamische integratie van organisaties bij fusies of uitvoering van gezamenlijke projecten.

De rol van en voor bedrijven

In de beginjaren lag het initiatief voor het ontwikkelen van de grids in handen van door de staat gefinancierde wetenschappelijke instellingen. De activiteiten richtten zich vooral op het ontwikkelen van specifieke wetenschappelijke applicaties voor onderzoeksgebieden zoals hoge-energiefysica en radioastronomie.
De grid-technologie heeft inmiddels de academische incubator verlaten en wordt bij bedrijven toegepast en door bedrijven als product of dienst aangeboden. Deze technologie maakt een nieuw businessmodel mogelijk, het omgaan met ICT-faciliteiten als met een nutsvoorziening, dat voor het bedrijfsleven zeer aantrekkelijk is.

Categorieën van grids

Grids kunnen op basis van het type ICT-bron dat wordt gedeeld of het doel dat wordt vervolgd worden gecategoriseerd in:
1. computerfaciliteiten-grid
2. reken-grid
3. data-grid
4. apparatuur-grid
5. toepassings-grid

Uitgaand van de basis van de schaal waarop de integratie en het delen van ICT-bronnen plaatsvindt kan men spreken van:

6. organisatie-grid
7. partner-grid
8. service-grid.

1. Computerfaciliteiten-grids

Bij een computerfaciliteiten-grid gaat het in eerste instantie om dynamische integratie van reken- en opslagfaciliteiten. De integratie vindt via het computernetwerk plaats en kan tot een afdeling, instituut, faculteit of universiteit zijn beperkt of de grenzen van de organisatie overstijgen.

2. Reken-grids

Als het doel van een grid is veel rekenkracht beschikbaar te stellen door het gecoördineerd gebruik van vele computers spreekt men ook van een reken-grid (*compute* grid). De ten grondslag liggende gedachte is dezelfde als die van het parallel rekenen: een toepassing wordt gesplitst in onderdelen die simultaan kunnen worden uitgevoerd op verschillende computers. Meestal gaat het hierbij om wetenschappelijke en technische simulaties waarmee veel berekeningen gemoeid zijn.
Reken-grids op basis van werkstations en PC's bieden een prijsgunstige oplossing voor vele problemen die met grootschalig rekenen te maken hebben. Ze zijn echter zeker geen oplossing voor alle rekenintensieve problemen en moeten dan ook niet als de ultieme vervanger van supercomputers worden gezien. Rekenproblemen die volledig te splitsen zijn in relatief grote onafhankelijke deelproblemen kunnen op meerdere computers tegelijk worden aangepakt. Een voorbeeld uit de cryptografie is het ontbinden van grote getallen in priemfactoren. Rekenproblemen die weliswaar op parallelle computers kunnen worden aangepakt, maar waar op gezette tijden intensieve communicatie tussen de processen plaatsvindt, lenen zich niet voor parallelle verwerking via een grid. De alles beperkende stap is de lichtsnelheid. Ongeacht de bandbreedte van het netwerk is de latentie bij berichtuitwisseling, zelfs met weglaten van alle protocoltijdverliezen en het feit dat de lichtsnelheid in glas nog lager is dan in vacuüm, een harde beperkende factor. Een grid dat een computer in Groningen en één in Delft omvat en waarop een parallelle job draait, zal bij elke uitwisseling van een bericht aan latentietijd zoveel verlies opleveren wat betreft verloren rekencycli dat in het geval van een frequente data-uitwisseling zo een grid nooit een alternatief voor een supercomputer kan zijn.

3. Data-grids

Naast rekenfaciliteiten is er behoefte om ook data-bronnen te delen. Bij een data-grid, ook informatie-grid genoemd, gaat het om toegang tot informatie-bronnen die op verschillende computers, administratieve domeinen of geografische locaties gevestigd zijn. De drijvende kracht achter de ontwikkeling van data-grids zijn toepassingen waarbij grote gedistribueerde hoeveelheden data en veel gebruikers op verschillende locaties betrokken zijn. In de academische wereld zijn voorbeelden hiervan te vinden op de terreinen van hoge-energiefysica, sterrenkunde, scheikunde, genetica, bioinformatica, humane en sociale wetenschappen en de kunsten. Ook bedrijven zoals banken, verzekeraars, olie- en luchtvaartmaatschappijen en de farmaceutische industrie werken met grote datasystemen die vanuit verschillende locaties door meerdere gebruikers geraadpleegd moeten worden.

‘naast reken-faciliteiten is er ook behoefte om data-bronnen te delen’

4. Apparatuur-grids

Apparatuur-grids geven toegang tot dure of unieke wetenschappelijke apparatuur zoals radiotelescopen, elektronenmicroscopen of instrumenten voor de registratie van aardbevingen. Momenteel zijn er weinig voorbeelden van apparatuur-grids. Eén daarvan is het samenwerkingsverband Network for Earthquake Engineering Simulation, NeesGrid. Vrijwel alle huidige apparatuur-grids zijn door universiteiten en andere onderzoeksorganisaties gerealiseerd.

De sensor-grid is een voorbeeld van een apparatuur-grid in opkomst. Hierbij wordt een groot aantal sensoren, vaak van diverse soorten en in lokale netwerken opgenomen, aan rekencapaciteit gekoppeld en op afstand gecontroleerd en bediend. Toepassingen lopen uiteen, van controle van autoverkeer tot klimaat- en milieuonderzoek, seismologie en precisielandbouw.

5. Toepassings-grids

Een toepassings-grid geeft toegang tot bepaalde applicaties via het computernetwerk. De software die de toepassing realiseert, kan op een computer zijn geïmplementeerd of over meerdere computers van een of meerdere organisaties zijn verspreid. De eerstgenoemde implementatievorm komt overeen met het application service provider-model dat nu de praktijk op dit terrein domineert. Het belang van de tweede genoemde implementatievorm zal met de verspreiding van componentgebaseerde technologieën en webdiensten voor de ontwikkeling van toepassingen in de komende jaren toenemen.

6. Organisatie-grids

Hierbij gaat het om grids die binnen een organisatie of een deel van een organisatie worden gerealiseerd. In de context van hoger onderwijs kan dit een afdeling, instituut, faculteit, hogeschool of universiteit zijn. Afhankelijk van de omvang van de grid kan men in dit verband onderscheid maken tussen instituut-, campus- of universiteits-grids. Het computernetwerk dat hiervoor wordt gebruikt is een *intranet*. Dit soort van grids is momenteel het belangrijkst voor de praktijk en dit zal ook in de komende jaren zo blijven. Hieronder wordt er extra aandacht aan besteed (zie: Cluster-systemen en intranet-gebaseerde organisatie-grids).

7. Partner-grids

Hierbij sluiten twee of meerdere organisaties overeenkomsten om bepaalde ICT-bronnen te delen, meestal in verband met de realisatie van bepaalde gezamenlijke projecten. Het computernetwerk dat gebruikt wordt is het *internet* en de te delen ICT-bronnen bevinden zich op verschillende geografische locaties en administratieve netwerkdomeinen. Hieronder vallen ook de grids van organisaties die geografisch verspreid zijn.
Binnen Nederland kan dit model van belang zijn voor bijvoorbeeld TNO of bij fusies van universiteiten met hogescholen of samenwerkingsverbanden tussen (technische) universiteiten bij de realisatie van gezamenlijke opleidingen.

8. Service-grids

Een trend in de ICT-ontwikkeling van de laatste jaren is de opkomst van leveranciers van verschillende ICT-diensten (service providers) zoals web-hosting, content-verspreiding, reken- en opslagcapaciteit en diverse toepassingen. Leveranciers van diensten maken gebruik van schaalvoordelen om diensten tegen een lagere prijs te kunnen leveren. Voor de afnemers is dit model voordelig omdat deze diensten niet tot de kerntaken van de afnemer horen. Bedrijven en organisaties kunnen wezenlijke kosten besparen door het uitbesteden van niet-essentiële onderdelen van hun ICT-infrastructuur aan dergelijke providers. Binnen een universiteit of hogeschool is er overigens een onderdeel dat bij uitstek geschikt is om de rol van leverancier of bemiddelaar bij de levering van zulke diensten over te nemen: het reken- of ICT-centrum.

Wereldwijde service-grids

De afzonderlijke wetenschappelijke en commerciële grids kunnen worden samengevoegd tot één wereldwijd grid. Met andere woorden: een *world-wide-grid* waar een ieder toegang toe heeft. Een dergelijk wereldwijd grid wordt als de opvolger van het World Wide Web gezien. Terwijl het World Wide Web toegang geeft tot multimediale informatie (tekst, beelden, muziek en film) op het internet, zal een wereldwijde grid toegang geven tot informatie en ICT-diensten.
Een wereldwijd grid is op dit moment echter steeds nog in ontwikkeling en kan in de komende vijf, misschien tien jaar slechts een beperkte rol voor Nederlandse universiteiten en hogescholen hebben. Het ontwikkelingsstadium waarin de wereldwijde grid zich bevindt, is enigszins vergelijkbaar met het stadium waarin het World Wide Web zich in 1994 bevond.

Clustersystemen en intranetgebaseerde organisatie-grids

De wereldwijde service-grid in het groot zoals hij door toekomstvisionairs wordt getekend als delen van ICT-bronnen via internet op mondiale schaal is er lang nog niet. Er zijn al wel voorbeelden van bedrijven en organisaties die via internet diensten van externe leveranciers gebruiken om hun ICT-infrastructuur aan te vullen.
Het overgrote aantal grids worden in eerste instantie binnen een organisatie op de basis van intranets gerealiseerd. Zulke organisatie-grids (enterprise grids) zijn op dit moment de belangrijkste toepassing van de gridtechnologie en dit zal het geval blijven voor de komende vijf jaar.
Het bouwen van clustersystemen, dat aan de universiteiten is begonnen als een alternatieve oplossing voor high-performance-computing, is nu een onderdeel van de ICT-industrie en er worden door hardwareleveranciers en systeemintegrators complete (*turn-key*) clustersystemen geboden.
Clustersystemen worden zowel aan universiteiten als ook in het bedrijfsleven gebruikt. De Rijksuniversiteit Groningen heeft bijvoorbeeld enkele clustersystemen voor wetenschappelijk rekenen; het grootste daarvan bestond tot voor kort uit 128 computers, maar inmiddels is dat aantal alweer gegroeid.

Radioastronomie

Radiotelescopen maken simultaan gebruik van meerdere antennes. Door de met deze antennes gewonnen signalen samen te analyseren krijgt men een grotere resolutie in het beeld van de hemel. Hoe meer antennes men gebruikt en hoe verder uit elkaar deze antennes staan, hoe groter het oplossingsvermogen. Tot nu toe was het in de radioastronomie gebruikelijk, antenna arrays te bouwen (Dwingeloo en Westerbork). Door antennes in verschillende landen met elkaar te verbinden kan men een nog grotere resolutie bereiken. Vereist is een snel datanetwerk en veel rekenkracht en opslagcapaciteit. Radioastronomen maken derhalve plannen om alle radiotelescopen in Europa te verbinden met de krachtige processor bij JIVE in Dwingeloo. Samen met SURFNet in Nederland en Géant in Europa zijn Gb/s dataverbindingen in 2003 aangelegd van de telescopen naar Dwingeloo. Vanaf 2004 hebben de astronomen daarmee een radiotelescoop zo groot als heel Europa.
LOFAR, voor een groot deel een Nederlands project, is een volgende ambitieuze stap. Deze telescoop bestaat uit meer dan 10000 eenvoudige radioantennes verspreid over een gebied met een diameter van ongeveer 350 km. Deze verzameling van antennes is feitelijk een groot wide-area sensornetwerk.
Binnen het LOFAR-project wil men verder gaan dan slechts antennes met elkaar en met rekencapaciteit verbinden. De voorgenomen rekenkracht van het systeem wordt voldoende om de individuele signalen tot acht maal toe te kopiëren en er simultaan in software een achttal onafhankelijke telescopen van te maken. Hierbij begint de grid een rol te spelen. Men wil met behulp van grid technologie 's werelds eerste multi-user, multi-tasking, on-line sofware telescoop bouwen, die vanuit operationele centra in meerdere landen kan worden aangestuurd: bij de Rijksuniversiteit Groningen, bij de MIT, in Cambridge, VS, en bij de Universiteit van Sydney in Australië. Uitgezocht wordt daarbij hoe één van de telescopen voor het algemeen publiek over het openbare Internet ter beschikking kan worden gesteld.
Vervolgens gaan de gedachten naar het koppelen van andere soorten sensoren aan de LOFAR netwerk infrastructuur. Gepland wordt om seismische sensoren aan te sluiten, om driedimensionale beelden met ongekend scherpe details van de aardgasreservoirs onder Noord-Nederland te maken. En uitgezocht wordt hoe milieusensoren voor experimenten in de precisie landbouw er ook bij kunnen.

'de wereldwijde service-grid als opvolger van het WWW is er nog lang niet'

Goede doelen en betrokkenheid van particulieren

Op dit moment is er een aantal projecten waarbij burgers een deel van de verwerkingskracht van hun personal computers aan een organisatie met een goed

doel ter beschikking kunnen stellen. Bij het project SETI@home (Search for Extraterrestrial Intelligence), dat ca. 6 jaar geleden is begonnen, wordt bijvoorbeeld naar sporen van buitenaards leven in gegevens uit radiotelescopen gezocht. Bij het project Find-a-Drug gaat het om de ontwikkeling van nieuwe geneesmiddelen tegen ziektes zoals kanker, pest, multiple sclerosis, SARS en AIDS. Na de terroristische aanslagen van 11 september 2001 werd in een soortgelijk project naar een vaccin tegen het pokkenvirus gezocht. In een Japans project wordt naar overeenkomsten en bepaalde patronen in de genetische informatie van mensen en de relatie ervan met bepaalde ziektes gezocht.
Strikt genomen gaat het bij zulke projecten niet echt om grid computing in de zin van 'verwerkingskracht uit de muur' – het gaat om gedistribueerde gegevensverwerking met Internet als communicatiemiddel. Het lijkt er echter op dat de begrippen 'distributed computing' en 'Internet computing', die hier zeker aan de orde zijn, inmiddels zijn opgegaan in het bijna alles overkoepelende begrip 'grid computing'.

Conclusies en aanbevelingen

In de komende vijf jaar kunnen grids een belangrijke rol gaan spelen. Een grid kan op basis van de bestaande ICT-infrastructuur binnen een afdeling, instituut, faculteit of universiteit of hogeschool worden gerealiseerd met behulp van specifieke middleware die al dan niet gratis te verkrijgen is.
Grids kunnen worden gebruikt voor verbetering van de efficiëntie van gebruik van de aanwezige ICT-infrastructuur, reductie van de directe ICT-investeringen en beheerskosten, toegang tot hoge computercapaciteit, gebruik van geïntegreerde gedistribueerde gegevensbanken en toepassingen, interactief samenwerken op afstand en experimenten uitvoeren met apparatuur op afstand.
De grootste kansen voor de inzet van grid technologie in het hoger onderwijs en onderzoek in de komende vijf jaar liggen op het terrein van computer-faciliteiten-grids binnen een organisatie(onderdeel) die reken- en opslagfaciliteiten binnen een administratief netwerkdomein via een intranet integreren. Wie deze kansen links laat liggen, zal te veel voor de nodige ICT-infrastructuur betalen en daarvan suboptimaal gebruik maken.

Grid-onderzoeksprojecten waarbij vele duizenden burgers een deel van de rekenkracht van hun computers via Internet ter beschikking stellen voor de oplossing van wetenschappelijke vraagstellingen hebben grote uitstraling op de rest van de maatschappij. Ook in Nederland is het mogelijk projecten te formuleren die van maatschappelijk hoogrelevante onderwerpen zijn afgeleid (bijvoorbeeld zorg, milieu, veiligheid, waterbeheer) en waarvoor zeker groot draagvlak bij de bevolking te vinden is. Relatief kleine stimuleringsprogramma's op dit terrein (vanuit OCenW, SURF of de universiteiten zelf) kunnen een groot rendement opleveren.

Dankzegging

Dit artikel is een verkorte versie van het hoofdstuk 'Grid Computing en E-science' verschenen in De vruchten plukken, Part 2 Onderzoek en Visie, trend report WTR SURF (Utrecht: WTR SURF, december 2003; ISBN 90-74256-24-4), 77-101.
De auteur bedankt Jos Tolboom voor de voor deze publicatie benodigde inkorting en bewerking.

Literatuur

- *D. Laforenza: Grid programming: some indications where we are headed. In: Parallel Computing 28 (2002), pp. 1733-1752.*
- *H. van der Pluijm: Verwerkingskracht uit de kraan. In: LAN Internetworking Magazine, 31-05-2003.*
- *I. Foster, C. Kasselman, J.M. Nick, S. Tuecke: Grid services for distributed system integration. In: IEEE Computer, June 2002, pp. 37-46.*
- *Meerdere berichten van Grid Today: www.gridtoday.com.*

Over de auteur

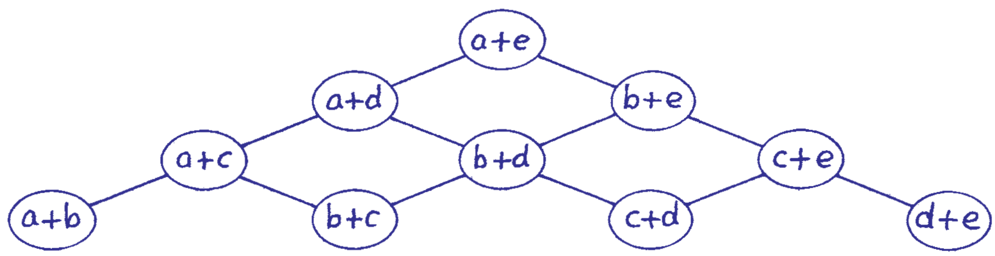
Nicolai Petkov (e-mailadres: petkov@cs.rug.nl) is hoogleraar informatica (vakgroep Intelligente Systemen) aan de Rijksuniversiteit Groningen.

[Frits Göbel]

Puzzel 804 - Er waren eens zes getallen

Een rekenopgave voor deze Rekenspecial zou wel passend zijn, maar dat is me niet helemaal gelukt. De eerste twee opgaven gaan weliswaar over optellen, maar de oplossing vereist geen rekenvaardigheid. Het betreft het volgende reconstructieprobleem.

Gegeven zijn $\binom{n}{2}$ getallen. Deze zijn ontstaan door van n getallen de som van ieder paar te bepalen. De vraag is of de n getallen te reconstrueren zijn uit de n 'dubbelsommen'.
Voor $n = 3$ is het probleem triviaal en voor $n = 2$ is het natuurlijk onoplosbaar!
We bekijken het geval $n = 5$ in een voorbeeldje.



FIGUUR 1

Stel de dubbelsommen zijn 48, 52, 56, 57, 61, 61, 65, 65, 69 en 74. Noem de onbekende getallen a, b, c, d, e met $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. We zien dat $48 = a + b$ en $52 = a + c$, maar de 56 zou evengoed $a + d$ kunnen zijn als $b + c$. In figuur 1 zien we een partiële ordening die de (on)zekerheden goed weergeeft.
In dit geval ($n = 5$) is het niet moeilijk om verder te komen: de som van de dubbelsommen is 608, dus $a + b + c + d + e = 152$. Omdat $a + b = 48$ en $d + e = 74$, is $c = 30$. Hierna zijn ook a, b, d en e snel te bepalen.

Opgave 1
Geef een reconstructiemethode voor $n = 6$.

Voor $n = 4$ is de reconstructie in het algemeen onmogelijk!

Opgave 2
Geef twee verschillende niet-dalende rijen van vier getallen die dezelfde rij van zes dubbelsommen geven.

Tot slot een opgave die toch wat meer een rekenkarakter heeft.

Opgave 3
Bepaal het aantal machten ≤ 1000000.
(Een macht is een getal van de vorm a^b met a en b geheel, $a \geq 1$ en $b \geq 2$. Een getal als 64, dat zowel een kwadraat als een derde macht is, telt maar één keer mee. Ook het getal 1 telt dus één keer mee.)

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 18 februari 2005.

Veel plezier!

Rectificatie Puzzel 803
In figuur 3 op pagina 122 (Euclides 80-3) zijn de roosterlijnen weggevallen. Hiernaast staat een verbeterde uitgave van die figuur (zie figuur 2).

Rectificatie Oplossing 801
Figuur 5 op pagina 123 (Euclides 80-3) is onjuist. Hiernaast staat de figuur zoals deze had moeten zijn (zie figuur 3).

Oplossing 'Diophantos en de centicubes'

Er kwamen 11 oplossingen binnen, waarvan 7 foutloos, namelijk van D. Buijs, W. Doyer, T. Kool, A. Verheul, J. Meerhof, W. van den Camp en H.J. Brascamp. De meeste inzenders gebruikten geen computer, voor zover ik kon nagaan, maar wellicht wel een rekenapparaatje.

Opgave 1

Deze opgave heeft 20 oplossingen. Een van de inzenders vond er slechts 7, een andere 6.
Uit de vraagstelling volgt
$2(a-2)(b-2)(c-2)=abc$
Dus a is te schrijven als

$$a=\frac{4(b-2)(c-2)}{2(b-2)(c-2)-bc} \qquad (1)$$

De noemer is nog te herleiden tot
$(b-4)(c-4)-8$
Voor een oplossing is nodig dat
$(b-4)(c-4)\geq 9$, dus $c\geq 5$
In (1) substitueren we $c=5$:

$$a=\frac{12(b-2)}{b-12}$$

Nu vullen we voor b achtereenvolgens in: 13, 14, ..., en als a geheel is, hebben we een oplossing. We stoppen als $b>a$. Dan behandelen we $c=6$, 7, 8 op dezelfde manier.
De 20 oplossingen zijn:
(132,13,5), (72,14,5), (52,15,5), (42,16,5), (36,17,5), (32,18,5), (27,20,5), (24,22,5), (56,9,6), (32,10,6), (24,11,6), (20,12,6), (16,14,6), (100,7,7), (30,8,7), (20,9,7), (16,10,7), (18,8,8), (14,9,8) en (12,10,8).

Opgave 2

Deze opgave kan met dezelfde methode worden aangepakt. De gevraagde waarden van k zijn 1 t/m 11, 14, 17 en 26. Een van de inzenders noemt ook 12 als waarde voor k, maar dat klopt niet.

Opgave 3

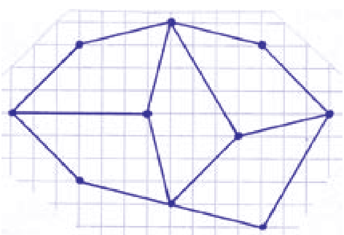
Voor willekeurige k ziet de vergelijking voor a er als volgt uit:

$$a=\frac{2(k+1)(b-2)(c-2)}{(k+1)(b-2)(c-2)-kbc}$$

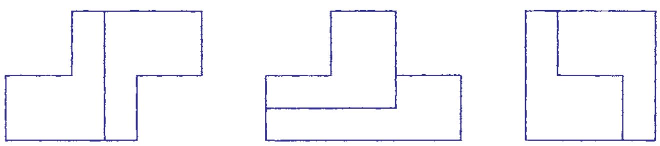
De noemer is nu te herleiden tot
$\big(b-2(k+1)\big)\big(c-2(k+1)\big)-4k(k+1)$
Hier zie je meteen dat er voor iedere k een oplossing is: als we b en c gelijk aan $4k+3$ nemen, is de noemer gelijk aan 1.
Voor $k=3$ wordt de formule natuurlijk nog eenvoudiger en op dezelfde manier als in opgave 1 vinden we 83 oplossingen. Het was niet nodig om ze alle 83 te vermelden, maar sommigen hebben dat toch gedaan. Bij de inzendingen was er een met 82 en een met 17 oplossingen.
De twee 'extreme' oplossingen zijn (3080,57,9) en (24,22,20).
H.J. Brascamp, een nieuwe inzender, heeft bij opgave 3 de extreme oplossingen voor willekeurige waarden van k bepaald. Ook onderzocht hij oplossingen met twee gelijke ribben. Voor k willekeurig zijn dat $b=c=4k+3$ en $b=c=4k+4$. Voor $k=3$ komt daar nog $b=c=20$ bij. Deze oplossing is de eerste van een oneindige rij waarin k een kwadratische functie is: $k=8$ met $b=c=42$, $k=15$ met $b=c=72$, enz. Hij ontdekte ook diverse rijen met $b=c$ waarin k een functie van hogere graad is. Verder bewees hij onder andere dat er geen oplossingen met $a=b$ zijn.

Ladderstand

De top van de ladder luidt nu:
A. Verheul 233
L. de Rooij 232
T. Afman 200
L. van den Raadt 190
T. Kool 163
J. Meerhof 154
W. Doyer 142
Zie voor de complete ladderstand *www.nvvw.nl/euclladder.html*.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Jaarrede uitgesproken door Marian Kollenveld

op de jaarvergadering van 6 november 2004

Dames en Heren,
ik zeg u van tevoren, dit wordt geen genuanceerd verhaal, u bent dus gewaarschuwd.
Het schrijven van de jaarrede is een mooie aanleiding om even stil te staan, een moment van reflectie zoals dat heet. Die reflectie die in het leren, het nieuwe natuurlijke leren, maar eigenlijk altijd, van groot belang is en die er zo vaak bij inschiet.
En toen vroeg ik mij af: Waarom zijn wij zo braaf?
- Waarom laten we de wiskunde wegdrukken uit mbo en hbo en verworden tot iets wat je even pakt als je het toevallig bij een project nodig hebt, terwijl we weten dat dat slechts fragmentarische kennis oplevert?
- Waarom hebben we indertijd de basisvorming op één niveau geaccepteerd, terwijl we wisten dat dat niet werkte?
- Waarom hebben we in de eerste jaren leerlingen met zeer beperkte mogelijkheden op wiskundig gebied bavo-toetsen voorgezet van een niveau waar ze niets mee konden?
- Waarom hebben we de meer getalenteerde havo/vwo-leerlingen te weinig geleerd, terwijl we wisten dat dat in de bovenbouw problemen zou opleveren?
- Waarom hebben we ons een perverse variant van zelfstandig leren laten aanpraten waarbij leerlingen zogenaamd zelfstandig, aan de hand van diverse boekjes (leerboek, antwoordenboek en studiewijzer), van som naar som gaan en de docent zoveel mogelijk zijn mond houdt?
Terwijl we weten dat dat saai is, we weten dat je wiskunde niet goed in je uppie zelf uit een boekje kunt leren. En we weten dat wij de kennis in huis hebben om de leerling verder te helpen, het begrip te verhelderen en te verdiepen, plus de mogelijkheden om hen te motiveren en te inspireren. Waarom doen we dat dan niet? (O, u doet dat allemaal wel? Mooi, dan heb ik u straks nodig.)

Het is misplaatste bravigheid, we mopperen wel, maar we doen niets, laten het gebeuren. En als je dat in de klas doet, dan krijg je ordeproblemen, zoals u weet, dan nemen de bijdehante jongens en meisjes het over.
En dat is wat er nu steeds in het groot gebeurt: anderen voeren de discussie en anderen nemen de beslissingen.
Daar heeft het hele onderwijs mee te maken, met al die stuurlui aan de wal, maar daar gaat het me nu niet om.
Vroeger, op de lagere school, heb ik iets geleerd als: ‘De kruik gaat zolang te water tot ze barst.’ Ik heb dat (zoals zoveel dingen) nooit echt begrepen, maar het lijkt me wel van toepassing. Laten wij het kruikje openen en zelf gaan zwemmen.

Oftewel meer vertrouwen op eigen kracht en professionaliteit, niet afwachten maar zelf het initiatief nemen, dat is beter voor u, voor uw leerlingen en op de langere termijn ook beter voor het vak.

‘Waarom zijn wij zo braaf?’

Initiatieven

Omdat we hoopten/dachten dat u dat misschien ook wel vond en omdat we het van levensbelang vinden voor de toekomst van ons dierbare vak hebben we zelf alvast wat initiatieven genomen:

- Bij de ingang heeft u zo’n mooie groene flyer ontvangen. Hij wordt ook meegestuurd met het decembernummer van Euclides. Een manifest over de wiskundedidactiek. We willen mensen bij elkaar brengen om onze eigen didactiek gestalte te geven en te ontwikkelen van vmbo tot wo. Wiskunde als motor van vernieuwing, niet als sleepanker. Ooit waren we de eersten die met contextrijk onderwijs begonnen, liepen we voorop, nu lijken we de

bezemwagen te naderen. Wat is ons antwoord op de vernieuwingen in de basisvorming, en het nieuwe leren?
- In een aantal werkgroepen van deze studiedag kunt u dit thema terugvinden. Er is al heel veel bekend over hoe mensen leren, en wat effectief wiskundeonderwijs is, en er gebeurt al heel veel. Laten we de kennis die in de vereniging aanwezig is gebruiken, bundelen en uitdragen. De kracht van de vereniging ligt in de breedte van het

Meer vertrouwen in eigen kracht en professionaliteit

ledenbestand, docenten van vmbo tot wo, lerarenopleiders, vakdidactici, onderzoekers en nascholers. Doet u vooral mee, we hebben u nodig.
- Aansluitend kan ik u meedelen dat de vereniging een aanvraag van mijn school heeft ondersteund om te laten onderzoeken hoe de wiskunde goed is in te zetten in bijvoorbeeld een sciencestroom in de onderbouw van havo/vwo, ook een actuele ontwikkeling, die ik u overigens van harte kan aanbevelen. Dat had ook andersom gekund, die aanvraag en die ondersteuning, maar we dachten zo meer kans te maken op succes.

Naast het ontplooien van eigen initiatieven is het van belang zoveel mogelijk actief betrokken te zijn bij de actuele ontwikkelingen, zoals rond de tweede fase.

- We hebben ons, het zal u niet zijn ontgaan, samen met andere partijen stevig verzet tegen de plannen van de minister met betrekking tot de tweede fase.
Hoewel we bepaald niet tevreden zijn met het uiteindelijke voorstel hebben we toch besloten de werkelijkheid te aanvaarden zoals die zich aan ons voordoet.
Het bestuur heeft daarop de werkgroep havo/vwo gevraagd om alvast na te denken over een mogelijke invulling van de nieuwe programma's voor wiskunde binnen de nieuwe randvoorwaarden. Dat resulteerde in een notitie die zich toespitste op de problematiek van wiskunde-B vwo, die door de meesten als het zwaarst werd ervaren. Deze notitie is in ruime kring verspreid en van commentaar voorzien. Vervolgens is een bijeenkomst belegd waarin deze notitie is besproken, samen met een inmiddels verschenen discussiestuk van OCW over een mogelijke invulling van de programma's.
Op basis hiervan is een reactie geschreven, inclusief onze eigen gedachten, die we tevoren hadden ontwikkeld. Deze reactie ligt ook voor u klaar op de verenigingstafel. In concept, dus er kan nog aan veranderd worden. Er is een lunchdiscussie, dus voel u vrij om uw bijdrage te leveren als u dat nuttig vindt. De definitieve reactie komt op de website.

- En natuurlijk, heel actueel, de profielcommissie B.
Nog even heel summier de voorgeschiedenis. Toen het ernaar uit zag dat het niet zou lukken om de minister zelf van haar plannen voor de tweede fase af te brengen, hebben we veel gelobbyd, met als resultaat dat er Kamerbreed een motie is aangenomen (de motie Hamer) waarin onder meer de problemen bij wiskunde zijn benoemd en de profielcommissies de opdracht kregen hierover uitspraken te doen en ook over toekomstige ontwikkelingen zoals het nieuwe bètavak.
De B-commissie is inmiddels benoemd, de andere nog niet. En ondanks de gedane toezeggingen dat er 'natuurlijk' royaal docenten in zouden worden opgenomen, heb ik maar één docent, biologie en decaan, kunnen ontwaren. Verder kijkend naar de samenstelling valt die op het eerste gezicht ook niet geheel samen met de bètalobby, het is een gezelschap van diverse pluimage, ook zeer uitgesproken alfa's.

Maar wij hadden van deze minister natuurlijk ook niet anders verwacht. Dat betekent wel dat de mensen in de commissie met een wiskunde-achtergrond, Robbert Dijkgraaf en Wim Kleijne, waarschijnlijk nog wel enig missiewerk te verrichten hebben. En hoewel we alle vertrouwen hebben in hun kennis en kwaliteit, Wim Kleijne is tenslotte niet zomaar erelid geworden, willen we ze graag zoveel mogelijk ondersteunen.

- We hebben daarom samen met de NOCW (Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde) het initiatief genomen tot een subprofielcommissie, met mensen uit de universiteiten, FI, hbo en het voortgezet onderwijs.

Missiewerk

Omdat er op nog veel meer plaatsen missiewerk moet worden verricht, hebben we van harte het initiatief van enkele universitair wiskundigen ondersteund om een ‘landelijke pr-medewerkster voor de wiskunde’ aan te stellen, samen met het KWG (Koninklijk Wiskundig Genootschap). Haar naam is Ionica Smeets. Het imago van de wiskunde kan wel wat worden opgepoetst. Veel volwassenen van nu, ook de mensen die het voor het zeggen hebben, lopen rond met het verstarde beeld van de eigen ervaring van 30 jaar geleden. Misschien kregen ze toen slecht les, misschien begrepen ze het niet, en voelden zich gefrustreerd en tekortschieten. Frustraties zijn taai, en dat gestolde beeld van wiskunde als hermetisch vak heeft ernstig tegen ons gewerkt, het afgelopen jaar.
We zijn heel blij met Ionica als tegenwicht; ze is nog niet eens 30, ze snapte de wiskunde prima want ze is net afgestudeerd aan de TU Delft, en ze wil graag het beeld van de wiskunde voor een algemeen publiek helpen te verbeteren, waarbij naast de lezer van de wetenschapsbijlagen ook de gewone Libellelezer zoals ikzelf niet geschuwd zal worden.

PR moet

We zijn door de opgedane ervaringen inmiddels zeer doordrongen van het belang van een goede PR.
Geen propaganda, maar goede voorlichting en communicatie. Extern, maar zeker ook intern.
De PR-commissie heeft daar een aantal behartenswaardige gedachten over ontwikkeld, die hopelijk dit jaar verder hun beslag krijgen. Het komt neer op een directere betrokkenheid bij elkaar en het werk in de klas. Informatie en ondersteuning, onderlinge discussie. Kortweg de vereniging nog meer dan nu als actief netwerk van deskundige en betrokken collega’s.

Website

De website is daarbij onontbeerlijk. Momenteel wordt in samenwerking met de beide webmasters door een bedrijfje de website verbouwd om hem gebruiksvriendelijker te maken en de mogelijkheden voor communicatie te vergroten. Er komen discussiefora en afgesloten hoekjes voor bijvoorbeeld leden van een werkgroep. Het zal, als het klaar is, de webmasters een hoop werk uit handen nemen. We hadden hem vandaag feestelijk willen presenteren, maar het is net de Betuwelijn, het duurt altijd langer dan je denkt. Hopelijk met minder kostenoverschrijding, dat is beter voor uw contributie.

Euclides

Een andere pijler in de communicatie is en blijft ons blad Euclides. Het belang dat we eraan hechten ziet u weerspiegeld in de begroting: we besteden in totaal zo’n 60% van de inkomsten aan Euclides. Dat is veel, maar we vinden dat verantwoord, enerzijds omdat we daarmee alle leden bereiken, en anderzijds omdat we daardoor een eigentijds en kwalitatief goed blad kunnen maken. Zowel over de inhoud als over de vormgeving zijn we zeer te spreken, de specials zijn elke keer weer zeer de moeite waard.

Zebra

De zebra-reeks blijkt een onverwachte bijdrage te leveren aan de PR. Ze worden ook heel goed verkocht in de gewone boekhandel, veel meer dan we hadden gedacht. We hopen dat we erin slagen de keuzeruimte in de vwo-programma’s te behouden, want daar ligt uiteindelijk de basis voor de reeks.
Ik had vandaag twee nieuwe zebra’s willen aankondigen, waaronder één van mijn illustere voorganger Hans van Lint en zijn partner Jeanne Breeman. Het onderwerp is zeepvliezen. Ik heb niet willen achterhalen of dat werd geïnspireerd doordat hij na zijn pensioen meer de afwas moest doen of dat hij wat meer ruimte kreeg voor vluchtige gedachten. Waarschijnlijk geen van beide.
Het is helaas niet mogelijk gebleken om het op tijd van de drukker te krijgen. Datzelfde geldt ook voor een andere Zebra, met veel nullen en enen die wat verward zijn geraakt. Maar voor de Kerst zijn ze er.

Lot in eigen hand - samen

Ik sluit af.
Het sleutelwoord is initiatief; neem het lot in eigen hand, vertrouw op uzelf en laat uw vak niet van u afnemen.
Dat strookt prima met de grotere vrijheid die scholen in elk geval in woorden krijgen om hun onderwijs

en dus ook hun wiskundeonderwijs vorm te geven. Laat het niet bij woorden blijven!
Maar tegelijkertijd is het zoeken naar de balans: er is zoveel te doen, er kan zoveel, er moet soms zoveel, soms heel erg dringend, er zijn zoveel goede ideeën, maar er is vaak zo weinig tijd. Dan heb je de steun van elkaar hard nodig, is het heel prettig als je niet alles zelf hoeft te verzinnen maar je bij collega's, in de vereniging, te rade kunt gaan.

ons daar zorgen om, maar hebben niet de illusie daar op korte termijn veel aan te kunnen veranderen.
Het netwerk van de vereniging kan er dan zijn als vraagbaak en als ondersteuning.

Het opzetten van zoiets kost tijd, en tijd is geld. Maar we geloven in onze missie en zullen proberen daarvoor, samen met anderen, binnen het deltaplan bèta/techniek of elders middelen te verwerven, want de vrije tijd van mensen raakt ooit op.

ten mensen zich van harte in voor de club, onze club. We willen ze en u dus graag heel hartelijk danken voor hun inzet en vragen u dit te ondersteunen met een applaus.
Dank u wel.

Zowel over de inhoud als de vormgeving van Euclides zijn we zeer te spreken...

Het bestuur heeft haar ambities met de vereniging vergroot, ik heb u daarover wat verteld.
We denken dat het nodig is gezien de ontwikkelingen die zich voordoen. De tijden zijn veranderd. Niet elke wiskundedocent is na een degelijke wiskundestudie leraar geworden, met een ruime wiskundige en didactische bagage. Er zijn veel alternatieve routes naar het leraarschap.
En op bijvoorbeeld vmbo-scholen die experimenteren met nieuwe vormen kan de begeleiding bij het leren van wiskunde in veel verschillende handen komen te liggen. We maken

Tot slot

Maar vandaag leven we nog volop in het tijdperk van de vrijwilligers. Een mooi moment om even de schijnwerpers te richten op al die mensen zonder wier belangeloze inzet de vereniging er eenvoudigweg niet zou zijn. Belangeloos, maar zeker niet zonder belang; een vereniging als de onze kan niet zonder al die leden die tijd stoppen in wat hen aan het hart gaat: het bevorderen van de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in Nederland. In al onze commissies, het bestuur en ook vandaag weer, op de studiedag, zet-

OP ZOEK NAAR... 'WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2005'

[Anne van Streun]

Manifest

Oriëntatie

Dit artikel is een eerste toelichting op het manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005' (zie [1]) en heeft tot doel om discussie en vooral inspirerende voorbeelden van secties en collega's uit te lokken.
Uit het manifest mag duidelijk zijn geworden dat de opstellers zich zorgen maken over een aantal ontwikkelingen in ons onderwijssysteem die de kwaliteit van ons wiskundeonderwijs aantasten. Daarbij denken wij aan het primaat van het versuffende 'zelfstandig' werken, het klakkeloos inzetten van ICT zonder duidelijk leerdoel, het verschijnsel van 'wiskunde op afroep' en het organisatorisch en ideologisch(!) terugdringen van de interactie tussen de docent en de groep leerlingen.
Wij hopen dat het manifest leidt tot uitwisseling van goede voorbeelden. Onder regie van bijvoorbeeld een didactiekcommissie van de NVvW kunnen we zo convergeren naar een duidelijker kader waarbinnen goed wiskundeonderwijs kan worden verzorgd en een tegenwicht kan worden geboden aan de spraakmakende trends in ons onderwijs.

Wiskundedidactiek

Veranderingen in het Nederlandse onderwijssysteem hebben onvermijdelijk geleid tot veranderingen in het wiskundeonderwijs, zowel wat betreft de inhoud als de didactiek. Hoe heeft zich gedurende de laatste decennia de wiskundedidactiek in de klas ontwikkeld? Vanaf 1968 (Mammoetwet) zijn een drietal werkvormen zichtbaar, namelijk de leraar die uitlegt (doceert), de leraar die in een leergesprek door middel van vraag en antwoord begrippen en technieken verheldert, en leerlingen die tijdens de les zelfstandig aan opgaven werken. De ruimte die de laatste werkvorm krijgt, varieert per leraar en hangt ook sterk af van de mate waarin het schoolboek zelfinstruerend werkt. Het leerproces van de leerlingen wordt in deze periode steeds meer inductief gestructureerd, met voorbeelden vooraf, gevolgd door een generalisatie en verwerking.
Joop van Dormolen is de eerste in Nederland die deze strategie door middel van de fasering OSAEV (oriënteren, sorteren, abstractie, expliciteren, verwerken) in een theoretisch kader heeft gefundeerd (zie [2]). In de meer recente, contextrijke, programma's zijn de oriënterende voorbeelden veelal ontleend aan toegepaste situaties. Het zelfstandig onderzoek, zoals dat in de natuurwetenschappelijke vakken een steeds belangrijker plaats krijgt, komt in het wiskundeonderwijs voor de tweede fase nog niet goed van de grond. Er is daar nog geen traditie om onderzoeksvaardigheden in het schoolexamen te toetsen.

Waar zoeken we naar?

De laatste verandering in ons Nederlands onderwijssysteem gaat gepaard met een sterke nadruk op een 'nieuwe' didactiek voor het onderwijzen en het leren. Net als rond 1968 (zie mijn oratie; [6]) is er sprake van een zwaar accent op allerlei vormen van zelfstandig werken aan taken, daarbij vaak ondersteund door ideologisch bevlogen schoolleidingen, die door organisatorische maatregelen meer klassieke vormen van ondersteuning van het leren van leerlingen in diskrediet brengen of zelfs bemoeilijken. De legitieme wens om meer samenhang in de schoolvakken tot stand te brengen ontaardt met name in het beroepsonderwijs soms/vaak in het verbrokkelen en incidenteel aanbieden (op afroep) van vakinhoudelijke concepten en methoden. Kijken we in het bijzonder naar de wiskunde als een essentiële discipline in de kennisontwikkeling van onze jeugd, dan dreigt er een nieuwe onderwijspraktijk te ontstaan waarin het verkrijgen van oppervlakkige kennis en enige algemene vaardigheden in de plaats komen van belangrijke leerdoelen die nationaal en internationaal de laatste vijftig jaar de kern van het wiskundeonderwijs vormen.

Zoals al in het eerder genoemde manifest is gesteld, lijkt het noodzakelijk om met name de wiskundedidactiek in deze tijd en in ons Nederlandse schoolsysteem opnieuw helder te formuleren. Voortbouwend op de ontwikkeling van de wiskundedidactiek in de laatste decennia is het zinvol om onderscheid te maken tussen de verschillende typen leerdoelen/leerprocessen, en voor elk type na te gaan wat we met onze leerlingen willen bereiken en welke hulp wij leerlingen daarbij kunnen bieden.

In vervolgartikelen in Euclides en met goede voorbeelden op de website van de NVvW kan die wiskundedidactiek verder worden geconcretiseerd en bediscussieerd. Om die discussie te stimuleren, formuleer ik in het vervolg mijn positie kernachtig zonder al te veel nuances! Daarbij concentreer ik mij op de drie eerstgenoemde doelen van wiskundeonderwijs, *Weten dat, Weten hoe en Weten waarom.* De twee andere aspecten, *Weten over weten* en *Houding*, zijn daarin geïntegreerd.

Parate kennis en routines

- Terugkijken en vergelijken

Sinds ik in 1964 mijn werk als wiskundeleraar begon, is er door het vervolgonderwijs altijd geklaagd over de (rekenkundige en wiskundige) kennis en vaardigheden van onze leerlingen, terwijl wij hetzelfde deden over onze instroom uit het basisonderwijs. Bij grote veranderingen in het wiskundeprogramma, bijvoorbeeld die van 1968, de invoering van de basisvorming en van wiskunde-A en -B, en nu weer bij de Tweede fase havo/vwo, is er ook altijd een piek in die klachten. Begrijpelijk, omdat het vervolgonderwijs zich door de eigen traagheid altijd achteraf aanpast bij de veranderde instroom, en omdat veel wijzigingen inderdaad ten koste zijn gegaan van het aanleren van traditionele technieken. Mijn eindexamenkandidaten hbs heb ik in twee keer twee lesuren algebra per jaar uitstekend geleerd om alle oplossingsmethoden van typen vergelijkingen paraat te hebben, enigszins inzichtelijk onderwezen en daarna flink getraind. Die leerstof vatte ik altijd samen op één A4'tje, maar er was daarnaast geen tijd om nog andere doelen na te streven. Dat is de prijs voor het nastreven van een hoge mate van paraatheid bij een forse omvang van kennis en routines!

- Kennen en kunnen

Natuurlijk is het belang van de parate beheersing van bepaalde technieken verminderd, bijvoorbeeld omdat met een computerprogramma (inclusief de grafische rekenmachine) al die oude vergelijkingen snel zijn op te lossen. Dat wil evenwel nog niet zeggen dat leerlingen niet een kern aan kennis en routines paraat moeten hebben. Het is al tientallen jaren uit psychologisch onderzoek bekend, dat die parate kennis helpt om bij het oplossen van problemen het werkgeheugen te ontlasten, zodat er meer capaciteit beschikbaar blijft voor het echte probleem. Natuurlijk moet die kern per schooltype verschillen en beperkt blijven, wil er nog ruimte overblijven voor de andere leerdoelen.

Over zo'n kern per schooltype moeten we het in een school en landelijk eens kunnen worden. Zo denk ik dat bijvoorbeeld alle leerlingen aan het einde van de basisvorming (zeg 2-havo/vwo en 3-vmbo) vlot de kenmerken van een lineair verband (grafisch, formule, context, tabel) moeten kennen en de bijbehorende typen vergelijkingen snel moeten kunnen oplossen. Zie de opgaven in [3].

Actiepunt: Selecteer de kennis en routines die leerlingen op zeker moment echt paraat moeten hebben.

- Hoe bereiken de leerlingen dat?

Uit de gangbare schoolboeken is voor leerlingen niet op te maken welke kernen zij paraat moeten hebben, omdat die kernen niet duidelijk geselecteerd zijn. Na het met inzicht en denksteuntjes verwerven van die kennis en routines moet voor leerlingen zichtbaar worden gemaakt dat zij bepaalde kennis en routines op elk moment voor 100% in plaats van voor 55% paraat moeten hebben voor een voldoende resultaat. Dus die paraatheid moet afzonderlijk worden getoetst, regelmatig onderhouden en individueel geoefend, waarbij bijvoorbeeld een computerprogramma een toets met korte-antwoordvragen genereert.

Actiepunt: Ontwerp een itembank waarmee de paraatheid van de kernen wordt getoetst.

- Welke hulp is daarbij nodig?

Nadat de bedoelde kernen in het leerproces aan de orde zijn geweest, heeft de docent, of beter nog de wiskundesectie, vooral een organiserende,

controlerende en norm bewakende rol. Voor elk leerjaar heeft de sectie ergens in maart/april een itembank van vragen vastgelegd die de parate kennis toetsen van feiten en begrippen die leerlingen op dat moment moeten beheersen. Na de eerste toetsgelegenheid in april kunnen de leerlingen nog verschillende malen de digitaal gegenereerde toetsen maken om te proberen de (bijna) 100% norm te halen. Ze moeten zelfstandig en individueel oefenen, bijvoorbeeld met digitaal aangeboden opgaven, om hun eigen paraatheid te verhogen, daar is lestijd te kostbaar voor! Uiteraard werkt falen zwaar door in het jaarcijfer.
Actiepunt: De jaartoets voor parate kennis en routines inbedden in het cijfersysteem van de school.

- Wat werkt niet goed?
De klassieke didactiek uit bijvoorbeeld 'Naar zelfstandig rekenen' van voordoen van een geïsoleerde techniek, nadoen en dan veel oefenen met rijtjes analoge opgaven leidt tot een korte termijn schijnsucces. Bij het oefenen met de volgende techniek verdwijnt de vorige in de vergetelheid. Als daarentegen de kern aan feiten en routines in het leerproces van een hoofdstuk niet afzonderlijk aandacht krijgt, dan wordt er ook geen paraatheid bereikt.
Actiepunt: Gevarieerde oefeningen ontwerpen om de paraatheid op peil te brengen en houden.

Probleemaanpak, toepassen, onderzoeks-vaardigheden

- Terugkijken en vergelijken
Als ik over wiskundeonderwijs spreek met oudere collega's van universiteiten en hogescholen van welke discipline ook, dan beginnen hun ogen te glinsteren als ze het over het onderwijs in de Euclidische meetkunde hebben. Daarin hebben ze geleerd om problemen aan te pakken, redeneringen op te zetten en hun denken te ontwikkelen. Op scholen waar voor de Euclidische meetkunde in wiskunde-B2 op het vwo een goede leraar is gevonden, hoor ik weer hetzelfde van leraren en leerlingen. Niet gemakkelijk, wel uitdagend!
De praktische opdrachten, de GWA, de profiel-werkstukken enzovoort zijn een nieuw element in onze wiskundeprogramma's. Mits goed opgezet, stevig begeleid en mede voorzien van een solide wiskundige inhoud, zie je dat leerlingen uitgedaagd worden tot een serieuze wiskundige activiteit, waardoor ze inderdaad onderzoeksvaardigheden leren ontwikkelen. In elk type vervolgonderwijs (zowel bij de gamma's als bij de bèta's) wordt wiskunde steeds meer op die manier benut voor het aanpakken van grotere ontwerp- en onderzoeks-opdrachten in de toegepaste hoek. De oproep van Jan van de Craats tijdens de laatste jaarvergadering van onze vereniging om ons voornamelijk te beperken tot het onderwijzen van algebraïsche vaardigheden (terug naar de oude hbs) negeert niet alleen de ontwikkelingen in alle vakken van havo-vwo maar ook die in het mbo, hbo en wo.

- Kennen en kunnen
In een centraal schriftelijk examen is er weinig ruimte voor het toetsen van deze kennis. Door alle leerjaren heen tot en met het schoolexamen moeten leerlingen leren, steeds grotere en complexere opdrachten aan te pakken en tot een goed einde te brengen. Een wiskundige kern in deze opdrachten, die veelal een onderzoeks- of ontwerpkarakter moeten hebben, is daarbij een vereiste. (Uiteraard geen kopieerwerk van internet.) Een opbouw van meer naar minder gestructureerde opdrachten ligt voor de hand. Uiteindelijk mondt dit traject uit in een profielwerkstuk, ook voor wiskundige opdrachten.
Actiepunt: De wiskundesectie ontwerpt door de jaren heen een lange leerlijn van dit type opdrachten.

- Hoe bereiken de leerlingen dat?
Individueel en in groepjes werken aan grote opdrachten, rapporteren over aanpak en resultaten, een verplichte terugblik op de eigen aanpak en manier van werken, lessen trekken voor de volgende keer, een eigen persoonsgebonden aanpak ontwikkelen. Waar ben ik goed in? Waar moet ik speciaal om denken?
Actiepunt: De wiskundesectie ontwerpt voor de leerlingen een algemeen kader waar de aanpak, het oplossingsproces en de rapportage aan moet voldoen.

- Welke hulp is daarbij nodig?
De docent begeleidt primair het proces en controleert daardoor of de leerlingen binnen het algemene kader opereren en inderdaad zelf productief bezig zijn.
Actiepunt: Binnen de school volgt de wiskundesectie eenzelfde strategie, waardoor het voor leerlingen duidelijk wordt waar het zwaartepunt in hun werk moet liggen.

- Wat werkt niet goed?
De beoogde leerdoelen worden niet bereikt als de docenten alleen het eindproduct van een groepje of individu beoordelen en niet de manier waarop dat product tot stand is gekomen. Het ontwikkelen van wiskundige onderzoeksvaardigheden stagneert eveneens als er geen duidelijke verantwoording wordt gevraagd van een solide wiskundige kern van de aanpak die tot het resultaat heeft geleid. Als het beoordelingskader van proces en product vaag blijft, leidt deze geringe sturing tot sterk wisselvallige resultaten zonder een duidelijke groei in kwaliteit.

Principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

- Terugkijken en vergelijken
Zeker na 1968 is onder invloed van publicaties van Richard Skemp en Joop van Dormolen het inzicht gegroeid dat leerlingen *niet* vanzelf in hun

langetermijngeheugen een samenhangend netwerk van wiskundige begrippen en methoden ontwikkelen. Met name het opsplitsen van de leerstof in kleine afzonderlijke eenheden die afzonderlijk werden geoefend en getoetst, bleek bij veel leerlingen tot rampzalige gevolgen in hun ordening van kennis te leiden. Een grafiek in de vorm van een rechte lijn had niets te maken met een eerstegraads functie, en beide stonden weer los van eerstegraads vergelijkingen. Een meer concentrische opbouw, waarbij telkens teruggegrepen wordt op een al eerder opgebouwd cognitief schema, is tegenwoordig in de meeste schoolboeken wel terug te vinden.

- Kennen en kunnen

De wiskundige kennis en methoden moeten in hun onderlinge samenhang en gekoppeld aan een bepaald type toegepaste situaties worden beheerst en gebruikt voor het oplossen van problemen.
Actiepunt: De wiskundesectie ontwerpt voor zichzelf samenhangende netwerken inclusief klassen van toegepaste situaties.
Zie de 'kennisgrafen' van Bert Zwaneveld in [7].

- Hoe bereiken de leerlingen dat?

Systematisch moeten leerlingen overzichten maken, samenhangen en onderliggende abstracties zoeken, expliciteren wat ze kennen en kunnen, in toepassingen de onderliggende wiskundige kernen opsporen, kortom reflecteren op hun kennis.
Actiepunt: De wiskundesectie bedenkt vragen en opdrachten om dat proces te stimuleren.

- Welke hulp is daarbij nodig?

In dit proces van niveauverhoging van de wiskundige kennis van de leerlingen speelt de interactie met de docent een centrale rol. Daar moet een belangrijk deel van de lestijd en het begeleiden van in groepjes werkende leerlingen aan worden besteed. Laat de leerlingen vanaf de brugklas rapporteren over de zelf gemaakte fouten, de eigen manier van werken verbeteren, de eigen kennis weergeven in opstelletjes enzovoort.
Actiepunt: De centrale functie van interactie moet binnen de school (weer) de ruimte krijgen.

- Wat werkt niet goed?

Funest voor de opbouw van een samenhangend netwerk van wiskundige kennis en toepasbare kennis in het langetermijngeheugen van de leerlingen is de toenemende praktijk van het 'bijleveren' van wiskunde op afroep. Op dit moment kiest men er vaak voor, vakken te doen opgaan in leergebieden, en wiskunde alleen aan te leveren (te laten 'opzoeken') als een praktijksituatie daar om vraagt. In tal van nieuwe onderwijsorganisatievormen wordt niet onderkend dat het doen *verwerven* en *consolideren* van nieuwe wiskundige concepten en vaardigheden een *noodzakelijke* voorwaarde is voor het *toepassen*, inzetten of gebruiken. In allerlei vormen van 'nieuw' leren, waarin wiskunde wordt *bijgeleverd* om realistische situaties aan te pakken, is onvoldoende aandacht voor de noodzakelijke opbouw van de *samenhang* van wiskundige concepten en methoden.

Werk aan de winkel

Binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren moet een proces op gang komen waarin individuele leraren en secties samen proberen een wiskundedidactiek anno 2005 te formuleren en vooral ook concreet te maken met 'good practice' uit lessen en scholen.
Wie denkt er mee?

Bronnen

[1] M. Bos, M. Kollenveld, W. Kuipers, A. van Streun: Manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005'. Bijgesloten in Euclides 80(3), december 2004.
[2] J. van Dormolen: Didactiek van de wiskunde. Utrecht (1974).
[3] NVvW: Wat heb je nodig aan algebra als je naar klas 4 gaat? (2001).
[4] R.R. Skemp: Wiskundig denken (1973).
[5] A. van Streun: Heuristisch wiskundeonderwijs (1989).
[6] A. van Streun: Het denken bevorderen (2001).
[7] B. Zwaneveld: Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs (1999).

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@fwn.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
5	3 maart 2005	18 januari 2005
6	14 april 2005	1 maart 2005
7	26 mei 2005	5 april 2005
8	23 juni 2005	10 mei 2005

vrijdag 25 februari
Grote Rekendag
Organisatie Freudenthal Instituut

vr. 4 en za. 5 februari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 1 maart
Eerste bijeenkomst Ratio Nascholingscursus Algebra
Organisatie Ratio / RU Nijmegen

dinsdag 8 maart (ook op 5 april)
Cursus Ruimtemeetkunde met ICT
Organisatie Freudenthal Instituut

do. 17 en vr. 18 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 18 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Radboud Universiteit Nijmegen

zaterdag 28 mei, Utrecht
Symposium XI: Kansen en verwachtingen
Organisatie HKRWO

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

NIEUW

Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten);
bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 7,00.
Prijs voor niet-leden: € 9,00 (in de betere boekhandel).

Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl

[Hans van Lint / Jeannne Breeman] **Zebra 18**



Zeepvliezen

In dit Zebra-boekje staan talrijke experimenten die te doen zijn met zeepsop en wat huis-, tuin-, en keukenspullen. De fascinerende structuren die de zeepvliezen daarbij vormen zijn de basis voor allerlei meetkundige vraagstukken.

ISBN 90 5041 084 7

[Leon van den Broek / Ruud Jeurissen] **Zebra 19**



Nullen en Enen

Een computer rekent alleen maar met enen en nullen. Bij het verzenden van bijvoorbeeld een digitale foto kan informatie verloren gaan. Codetheorie geeft methodes om deze fouten te verbeteren. Hoe dat in zijn werk gaat, ontdek je in deze Zebra.

ISBN 90 5041 087 1

Epsilon uitgaven
in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

---

Wilt u:

- Onderwijsverbetering gecombineerd met werkdrukvermindering?
- Ook eens proefwerken, behorende bij een andere methode, inzien?
- Uitgeteste toetsen gebruiken?
- Schoolexamens van andere collega's bekijken?
- CSE's in WORD-formaat downloaden?
- 24 uur per dag de beschikking hebben over meer dan 1000 toetsen?
- Bij problemen met software, GR, e.d. deskundigen raadplegen?
- Advies krijgen bij andere problemen?
- Uitwerkingen bij bestaande toetsen en verschillende Zebra-deeltjes?
- Uitgewerkte Praktische Opdrachten afdrukken?
- Ontwikkeld lesmateriaal en/of files bij wiskundesoftware downloaden?
- Met onze Losse Opgaven Pagina's verantwoorde toetsen samenstellen?

WisBase

Surf dan naar **www.wisbase.com**
Download het inschrijfformulier en meldt u aan als deelnemer.
Instapvoorwaarde: inleveren van 3 originele toetsen.

Inlichtingen: info@wisbase.com
Secretariaat: J. Brasserstraat 26
4333 MB Middelburg

Wolters Noordhoff

'Wilt u meewerken aan hoogwaardige leermiddelen voor het vak wiskunde?'

Auteur Wiskunde m/v
voor vmbo en havo/vwo

Wolters-Noordhoff BV ontwikkelt uitgaven voor het onderwijs. Het is een inspirerend en boeiend bedrijf met een rijke historie en een open oog voor de toekomst. Creatief ondernemerschap en constructief teamwork bepalen het werkklimaat.

Er werken circa 500 mensen bij Wolters-Noordhoff. Het bedrijf is gevestigd in Groningen en Houten en bestaat uit een aantal units en een relatief kleine staf. De business units houden zich bezig met de ontwikkeling en de marketing van producten. Zij worden daarbij ondersteund door de service units.

Wolters-Noordhoff is onderdeel van Wolters Kluwer. Wolters Kluwer richt haar activiteiten op het uitgeven van informatie voor de overheid, bedrijven, instellingen, scholen en individuele beroepsbeoefenaren in een groot aantal vakgebieden. In Nederland werken circa 4000 personeelsleden voor de verschillende bedrijven en werkmaatschappijen.

Wolters-Noordhoff heeft een grote traditie in het ontwikkelen van leermiddelen voor het wiskunde onderwijs. De methoden *Moderne wiskunde* en *Netwerk* omvatten een rijk assortiment van leermiddelen bestaande uit leer- , werk- en antwoordenboeken, proefwerkbundels en ICT. Voor het ontwikkelen van de nieuwe edities van zowel *Moderne wiskunde* en *Netwerk* is Wolters-Noordhoff op zoek naar auteurs.

omschrijving
Als auteur ontwikkelt u kwalitatief hoogwaardige leermiddelen voor het vak wiskunde. In samenwerking met andere auteurs wordt er meegewerkt aan de vernieuwing van de betreffende methode. Deze vernieuwing bestaat uit de herziening van het bestaande materiaal en het ontwikkelen van educatieve software.

profiel
U bent werkzaam (geweest) in het Voortgezet Onderwijs in het vak wiskunde.
U heeft ervaring met het ontwikkelen van leermiddelen en u bent bereid zich hierin verder te specialiseren.
U kunt op basis van een concept leermiddelen ontwikkelen en bent in staat om commentaren van collega-auteurs te verwerken. Ook kunt u op gedetailleerd niveau commentaar leveren op het werk van andere auteurs. U bent bereid om maandelijks te overleggen met collega-auteurs op een centrale plaats in het land.

aanbod
Wij bieden u de mogelijkheid om in een inspirerend team van auteurs te werken aan toekomstgerichte materialen voor het onderwijs.
We bieden u een auteurscursus en begeleiding. De vergoeding vindt plaats op royalty-basis.

aanmelding
U kunt uw interesse kenbaar maken door een cv met beknopte motivatie te sturen aan Wolters-Noordhoff BV, t.a.v. Dieuwke Rosema, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mail d.rosema@wolters.nl

Wolters-Noordhoff ... ervaring met toekomst